

SEMESTRE 6 - Session 2
LICENCE 3 - Mention ECONOMIE

OPTIMISATION

Seule la calculatrice FX-92 est autorisée.

1. Les ensembles suivants sont-ils convexes ?

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 3^x 4^y \leq 5x + 2y, |x - 6y| \leq 2\}$.

(b) $D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 ; x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 2(4 + xy), x - z = 3 - 3y\}$.

2. Soit $f(x, y, z) = (x + 1)^2 + 2y^2 + (y - z)^2$.

Résoudre le problème de minimisation suivant :

$\mathcal{P}_1$: Minimiser $f(x, y, z)$ sur $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y \leq x + 3, y + z + 1 \leq 0\}$.

3. Le problème d'optimisation suivant a-t-il au moins une solution ?

$\mathcal{P}_2$: Minimiser $f(x, y, z) = x(1 + yz)$ sur $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + 3y^2 \leq z^2 - y^2 \leq 7\}$

4. Soit $f(x, y) = x^{-3}y^{-4}$ et $F(\alpha, \beta) = \ln f(x, y) + 3\alpha x + 4\beta y ; (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

(a) Montrer que f est convexe sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

(b) Montrer que F est concave sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ (sans calculer F).

(c) Pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, calculer $F(\alpha, \beta)$.

5. Soient $p \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\mathcal{P}_p$ le problème suivant :

$\mathcal{P}_p$: Minimiser $f(x, y) = x + 4y + \frac{1}{xy}$ sur $K_p = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 ; x + 4y \leq p\}$.

On note $V(p) = \ln f(x, y) ; (x, y) \in K_p$

(a) Calculer la hessienne de f et montrer que f est strictement convexe sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

(b) Résoudre $\mathcal{P}_p$ et calculer $V(p)$.

Barème envisagé : 1)2+2 2)4 3)2 4)1+1+3 5)2+3.