Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d'économie de Toulouse

Année universitaire 2017-2018

Session 1

Semestre 5

Licence 3 mention Économie
Epreuve : Théorie des Jeux
Date de l'épreuve : Jeudi 14 Décembre 2017
Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés :

Liste des matériels autorisés :

Nombre de pages (y compris page de garde) : 4.

Instructions : les réponses doivent êtres **justifiées**, **précises**, et si possible **concises**.

Le barème est indicatif.

Exercice I (8 points)

Anne et Brice jouent le jeu suivant. Trois enveloppes sont disposées dans une boite. Une enveloppe contient 100 euros, une autre enveloppe contient 200 euros et la troisième enveloppe contient 300 euros. Les enveloppes ne peuvent être distinguées et chaque enveloppe a la même probabilité d'être tirée au sort. Le déroulement du jeu est le suivant. Anne tire au sort l'une des trois enveloppes, puis Brice tire au sort l'une des deux enveloppes restantes. Anne ouvre son enveloppe, découvre le montant qu'elle contient, et décide si elle souhaite échanger son enveloppe avec celle de Brice. Si elle décide de ne pas réaliser l'échange (action N) le jeu s'arrête et chaque joueur garde son enveloppe initiale. Si elle propose à Brice de faire l'échange (action E) Brice peut accepter ou refuser de réaliser l'échange (Brice ne connait pas le contenu de son enveloppe). Si Brice accepte (action A) l'échange est réalisé et le jeu s'arrête. Si Brice préfère ne pas faire l'échange (action R) le jeu s'arrête et chacun conserve son enveloppe initiale. Chaque joueur cherche à maximiser son gain monétaire espéré.

1. Représenter la forme extensive de ce jeu à l'aide d'un arbre.

Indice. Pour ce jeu la nature joue en premier et décide de la distribution des enveloppes. Il existe six situations (évènements) possibles, et chacune de ces situations à une probabilité 1/6 de se réaliser.

2. Donner l'ensemble des stratégies de Anne et l'ensemble des stratégies de Brice, le nombre de stratégies de Anne, et faire la liste des sous-jeux.

3. Existe-t-il un équilibre de Nash dans lequel, à l'équilibre, l'échange des enveloppes n'est jamais réalisé ? Si oui donner un exemple et expliquer le résultat. Si non expliquer pourquoi.

4. Existe-t-il un équilibre de Nash dans lequel, à l'équilibre, l'échange des enveloppes est toujours réalisé ? Si oui donner un exemple et expliquer le résultat. Si non expliquer pourquoi.

5. Existe-il un équilibre de Nash dans lequel l'échange des enveloppes est réalisé avec probabilité strictement positive ? Si oui donner un exemple et expliquer le résultat. Si non expliquer pourquoi.

Exercice 2. (8 points)

Deux joueurs 1 et 2 jouent le jeu séquentiel G suivant. 15 étiquettes sont posées sur un tableau et les joueurs jouent en alternance. Un joueur qui prend une décision doit enlever au moins une étiquette. Si le nombre d'étiquettes restantes est impair il ne peut enlever qu'une seule étiquette. Si le nombre d'étiquettes restantes est pair il a le choix entre enlever une unique étiquette et enlever la moitié des étiquettes restantes. Le joueur qui enlève la dernière étiquette gagne le jeu.

1. Supposons que le joueur 1 joue en premier.

1.a. Caractériser un équilibre de Nash parfait en sous-jeux en prenant soin d'indiquer les stratégies d'équilibre avec précision. Expliquer.

Peut-on en déduire l'issue du jeu pour tout équilibre de Nash Parfait en sous-jeu ? Expliquer.

1.b. La réponse à la question précédente est-elle différente si on s'intéresse aux équilibre de Nash ? Expliquer.

Donner un équilibre de Nash de ce jeu qui n'est pas un équilibre de Nash parfait en sous-jeu. Expliquer.

2. Soit le jeu à deux étapes suivant. A la deuxième étape les joueurs jouent le jeu G de la question 1. A la première étape les joueurs choisissent simultanément un nombre réel positif, $b_i \geq 0$ pour $i = 1, 2$. Le joueur qui choisit le nombre le plus élevé gagne ce jeu d'enchère. Si les deux joueurs choisissent le même nombre on suppose que le gagnant de l'enchère est le joueur 1. Le gagnant i de l'enchère choisit lequel des deux joueurs joue en premier dans le jeu G, paie le montant de son offre b_i, et l'autre joueur paie 0. Puis les deux joueurs jouent le jeu G de la question 1, le gagnant du jeu G gagne en plus la somme $V > 0$, et il n'y a pas de paiement additionnel pour le perdant. Ainsi, le paiement d'un joueur qui a payé le montant b à la première étape du jeu est $V - b$ si il a gagné le jeu G et $-b$ sinon.

2.a. Caractériser la fonction BR de 1 à la première étape du jeu lorsque les joueurs jouent l'équilibre de Nash parfait en sous-jeu de la question 1.a. à la seconde étape. Si vous n'avez pas répondu à la question 1.a. faites l'hypothèse selon laquelle l'un des joueurs (soit celui qui joue en premier, soit celui qui joue en second, au choix) peut s'assurer la victoire du jeu G de seconde période, et on notera (σ_1, σ_2) les stratégies d'équilibre de ce jeu de seconde période, où σ_1 est la stratégie du joueur qui joue en premier et σ_2 la stratégie du joueur qui joue en second. Expliquer.

2.b. Caractériser l'ensemble des équilibres de Nash parfaits en sous-jeu du jeu dynamique. Expliquer.

Exercice 3. (8 points)

On considère le jeu de concurrence symétrique suivant, qui est joué par $n \geq 3$ joueurs (firmes). Chaque joueur choisit de se rendre sur le marché G (action G) ou sur le marché D (action D). Si un joueur est le seul à choisir G son paiement est égal à $\pi(G) = A > 0$, si le joueur est le seul à choisir D son paiement est $\pi(D) = A > 0$, dans les autres cas son paiement est 0 (par exemple car les firmes se font une concurrence en prix).

1. Donner l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures.

2. On suppose désormais que les stratégies mixtes sont autorisées et que $n = 3$.

2.a. Décrire l'extension mixte de ce jeu.

2.b. Caractériser la fonction meilleure réponse du joueur 1. Expliquer.

2.c. Existe-t-il un équilibre de Nash pour lequel aucun joueur ne joue une stratégie pure ? Expliquer.

3. On suppose que le nombre de joueurs est n avec $n \geq 3$, que le profit sur le marché G, $\pi(G) = B$, est supérieur au profit sur le marché D, $\pi(D) = A$, soit $B > A > 0$, et que les stratégies mixtes sont autorisées. Existe-t-il un équilibre de Nash symétrique pour lequel aucun joueur ne joue une stratégie pure ? Expliquer.