Toulouse School of Economics

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2017-2018

Session 2 - Semestre 5

Licence 3 mention Économie

EPREUVE : PROBABILITÉ STATISTIQUE

Enseignant : Mylène DUVAL

Date de l'épreuve : Mardi 12 Juin 2018

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun document

Liste des matériels autorisés : calculatrice type casio fx-92

Nombre de pages (y compris page de garde) : 3

Exercice 1. Autour de la loi géométrique

Partie 1 :
Soit $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Rappeler la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.
   (c) En utilisant le résultat précédent, calculer $\mathbb{P}(Z \geqslant k)$.
   (d) En déduire $\mathbb{P}(Z = k)$. Quelle est la loi de Z ?
2. Déterminer si les variables X et Z sont indépendantes.

Partie 2 :
Dans cette partie, X suit une loi géométrique de paramètre p telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = i) = \frac{2}{3^i}$$

Soit U une variable aléatoire telle que, sachant $X = i$ ($i \in \mathbb{N}^*$), U suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{i; i+1\}$.

3. (a) Quelle est la valeur de p ? En déduire l'espérance de X.
   (b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{E}(U|X = i)$.
   (c) En déduire $\mathbb{E}(U|X)$, puis $\mathbb{E}(U)$.
4. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, U).
   (b) En déduire la loi de U.

Exercice 2. Autour de l'espérance conditionnelle
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité f définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y} - y} \mathbb{1}_D(x, y)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, \ y > 0\}$.

1. Déterminer la densité marginale de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Déterminer la densité conditionnelle de $X|Y = y$, $y > 0$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X|Y = y)$, $y > 0$.
5. En déduire $\mathbb{E}(X|Y)$.
6. En déduire $\mathbb{E}(X)$

Exercice 3. Autour des vecteurs Gaussiens

Soit X un vecteur Gaussien tel que

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

<u>Partie 1</u> :

1. Donner la loi de X_2 puis sa densité.
2. Calculer la valeur du coefficient de corrélation $\rho(X_2, X_3)$ défini par

$$\rho(X_2, X_3) = \frac{Cov(X_2, X_3)}{\sigma_{X_2}\sigma_{X_3}}$$

3. Calculer $\mathbb{P}\left(X_2 + 3 > X_3\right)$.
4. Déterminer la droite de régression de X_2 en X_3.
5. En utilisant ce qui précède, déterminer $\mathbb{E}\left(X_2 | X_3\right)$.

<u>Partie 2</u> :

On définit le vecteur aléatoire $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ où

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 - 2X_2 + X_3 \\ Y_2 &= X_1 - X_3 + 1\,. \end{aligned}$$

6. Déterminer la loi de Y.
7. Déterminer si Y_1 et Y_2 sont indépendantes.