Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d'économie de Toulouse

Année universitaire 2017-2018

Session 1

Semestre 5

Licence 3 mention Économie

Epreuve : Probabilité Statistique

Date de l'épreuve : Mardi 12 Décembre 2017

Durée de l'épreuve : 2h00

Liste des documents autorisés : aucun document

Liste des matériels autorisés : calculatrice type casio fx-92

Nombre de pages (y compris page de garde) : 3

Exercice 1.
Soit $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose $Z = \mathbb{1}_{X+Y=0}$.

1. Montrer que $Z \sim \mathcal{B}\big((1-p)^2\big)$.
2. Déterminer la loi de $\mathbb{E}(X|Z)$.

Exercice 2.
Soit (X,Y) un vecteur Gaussien de densité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{7}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2} + y^2\right)}$$

1. Rappeler la formule générale de la densité d'un vecteur Gaussien (X,Y), en explicitant les notations utilisées.
2. Vérifier que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & \text{a} \\ \text{a} & 1 \end{pmatrix}\right)$, où a est une constante à préciser.
3. Déterminer les lois de X et Y.
4. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
5. Déterminer la droite de régression de Y sur X.
6. Déterminer $\mathbb{E}(Y|X)$.
7. Déterminer la loi du vecteur Z de composantes

$$\begin{aligned} Z_1 &= \tfrac{1}{2}(X+Y) \\ Z_2 &= 2X - 3Y \end{aligned}$$

Exercice 3.
Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de densité f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = ce^{-x}\mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x\}$ et c est une constante.

Partie 1 :

1. Montrer que $c = 1$.
2. Déterminer la densité marginale de Y.
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant \ln(2))$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $Y_1, ..., Y_n$ indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Y. Déterminer la fonction de répartition de M_n, où $M_n = \max(Y_1, ..., Y_n)$.

Partie 2 :

1. Déterminer la densité conditionnelle de $X|Y = y$, $y \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(X|Y)$.
3. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
4. Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
5. On pose $U = X$ et $V = \frac{Y}{X}$.
   (a) Rappeler les hypothèses du théorème de changement de variables et donner la formule générale de la densité de (U, V).
   (b) Déterminer la densité de (U, V).
6. Montrer que V suit une loi uniforme sur $]0, 1[$.