Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d'économie de Toulouse

Année universitaire 2017-2018

Session 1

Semestre 5

Licence 3 mention Économie

Epreuve : Mathématiques

Date de l'épreuve : Mercredi 13 Décembre 2017

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice Casio FX-92

Nombre de pages (y compris page de garde) : 2

UNIVERSITE TOULOUSE I CAPITOLE

ANNEE UNIVERSITAIRE 2017-2018
PREMIERE SESSION

LICENCE 3 MENTION ECONOMIE

Mathématiques

- - - - - - - - - -

Seule la calculatrice FX-92 est autorisée.

1. Soit q la forme quadratique définie par $q(x,y,z) = (x+y)^2 + (2x+z)(2y+z)$.
   (a) Préciser la matrice A, symétrique, canoniquement associée à q .
   (b) Quelle est la signature de q ?
   (c) Montrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^3 : \; q(X) \leq 5\,\|X\|^2$.

2. Soit $f(x,y) = e^{x+y} - e^{2x} - 2e^y$
   (a) Déterminer le gradient et la matrice hessienne de f.
   (b) Quels sont les points critiques des f ? Sont-ils dégénérés ?

3. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils fermés ? ouverts ? bornés ? compacts ?

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; z^2+y^2 = 1\,,\, x^2+y^2 \leq 5z\right\} \\
K_2 &= \left\{(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3;\; x < y < z-4\right\} \\
K_3 &= \left\{\left(s-2t, s+t^2, s^3+t\right)\;;\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \; 0 \leq s \leq t \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

4. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash$ {-1;1} et S une matrice de symétrie. I désigne la matrice identité de même taille. Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que : $(I+\alpha S)^{-1} = \beta\,(I-\alpha S)$.
   (b) En déduire l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. (a) Etudier la convergence de la série suivante : $\sum \frac{2n+1}{n\sqrt{4n+3}}$
   (b) Calculer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum \frac{2^n (n+3)^5 x^n}{3^{n+5}}$

Barème envisagé : *1)1+2+1* *2)2+2* *3)2+2+2* *4)1+2* *5)1+2*