

Année universitaire 2017-2018

Session 2 - Semestre 4

**Licence 2 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique
Appliquées**

EPREUVE : STATISTIQUE

Enseignant : S. CASANOVA

Date de l'épreuve : 15/06/2018

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : seule une calculatrice non programmable est autorisée

Nombre de pages (y compris page de garde) : 4

Questions de cours (2 points)

Enoncer le théorème central limite et la loi des grands nombres avec les notations du cours.

Exercice 1 (5 points)

Un estimateur T_n (n est la taille de l'échantillon utilisé) d'un paramètre réel θ est de loi définie par

$$P(T_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n} ; P(T_n = n) = \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que T_n est convergent en probabilités vers θ .
2. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $V(T_n)$ en fonction de θ . En déduire l'erreur quadratique moyenne de T_n en fonction de θ .
3. T_n est-il convergent vers θ en moyenne quadratique ?

Exercice 2 (5 points)

Soit X une v.a.r. de loi de Paréto de densité définie par

$$f(\theta, x) = \frac{2^\theta \theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{(2, +\infty)}(x)$$

où θ est un paramètre > 2 inconnu. On fait n réalisations indépendantes X_1, \dots, X_n de X .

1. Déterminer l'estimateur par maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ sur la base des n observations de X .
2. Déterminer l'estimateur par la méthode des moments $\hat{\theta}_{MM}$ de θ sur la base des n observations de X .

Exercice 3 (4 points)

Afin de vérifier si une machine est bien réglée, on contrôle le diamètre des pièces qu'elle produit. On supposera que le diamètre d'une pièce a une distribution normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On prélève un échantillon de 10 pièces. Les diamètres, mesurés en mm, sont donnés dans le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
4.5	5.1	5	4.9	5.2	4.8	5.1	5.2	4.9	4.7

1. Donner une estimation ponctuelle de μ et de σ^2 . On donne $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 0,464$.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$.
On donne : $\chi_{0,025}^2(9) = 16,679$ et $\chi_{0,975}^2(9) = 2,532$.

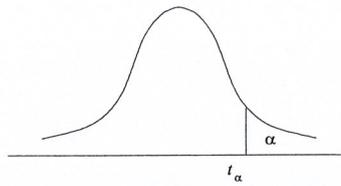
Exercice 4 (4 points)

On veut comparer deux méthodes de séchage du maïs, l'une avec préchauffage (méthode A) et l'autre sans préchauffage (méthode B). Pour cela, on prélève 32 épis, dont 16 sont séchés avec la méthode A et 16 sont séchés avec la méthode B. Le tableau suivant résume, pour les deux méthodes, les taux de séchage que l'on suppose normalement distribués.

	avec préchauffage (%)	sans préchauffage (%)
Moyenne	16,6	14,6
Ecart-type estimé	3,98	4,46

Comparer à l'aide d'un test d'hypothèses au niveau $1 - \alpha = 95\%$ les deux méthodes de séchage.

Loi de Student



d.d.l.	α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1		3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8		1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14		1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16		1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Loi de Fisher ($\alpha = 0, 025$)

	Degrés de liberté du numérateur : v_1									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	968.63	976.71	984.87	993.10	997.25	1001.41	1005.60	1009.80	1014.02	1018
2	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.76	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00