Licence 2 mention Economie parcours économie et mathématiques et informatique appliquées
Epreuve : PROBABILITES 2 - C. GRUEN
Code : L2-S4-8
Mercredi 13 juin 2018

Pas de documents. Calculatrice collège autorisée.

Exercice 1. [4P] Soit Ω un ensemble dénombrable, non vide. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω.

1. Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
2. Donner la définition d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Donner la condition pour que la probabilité conditionnelle de l'évènement $Y = y$ sachant l'évènement $X = x$ soit bien définie et dans ce cas en donner la définition.
4. On suppose que $\mathbb{P}[Y = y|X = x]$ et $\mathbb{P}[X = x|Y = y]$ sont bien définies. Donner une relation entre les deux probabilités et la démontrer.

Exercice 2. [6P] On regarde le jeu suivant. Deux joueurs jettent chacun simultanément un dé équilibré. Si le nombre de points indiqué sur le dé d'un joueur est strictement inférieur à celui de l'autre, celui-ci paye le montant de points de son dé en euro à l'autre joueur. Si les points sont égaux il y a match nul et personne ne gagne. On note X le nombre de points indiqués sur le dé du premier joueur et Z son gain.

1. Soit $i \in \{1, \dots, 6\}$. Donner la probabilité que $X = i$.
2. Déterminer la loi du couple (X, Z) et la loi de Z.
3. Quelle est la probabilité que le premier joueur ait un gain supérieur où égal à 2 en ayant une nombre des points sur son dé supérieur ou égal à 4 ?

Exercice 3. [6P] On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$f(t, s) = \alpha e^{-2t}(1 - s)\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(t)\mathbb{1}_{[0,1]}(s).$$

1. Déterminer α.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes. Quelle est la covariance du couple (X, Y) ?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 4. [5P] Il fait beau et c'est la saison donc Anna va en forêt chercher des champignons. En moyenne elle trouve 100 champignons dans une après midi. La probabilité qu' un champignon qu'elle trouve soit comestible est de $\frac{2}{3}$. On suppose que la comestibilité des champignons est indépendante d'un champignon à l'autre et on modélise le nombre des champignons qu'elle trouve pendant un après midi avec une variable aléatoire N de loi Poisson.
Quelle est la probabilité que le nombre de champignons comestible qu'Anna aura trouvés à la fin de l'après-midi S soit égale à k pour un $k \in \mathbb{N}$? En déduire l'espérance de S.

4/6