

Le barème est indicatif.

Exercice 1 (10 points)

Vous disposez à $t = 0$ d'une somme de 1000 euros que vous voulez placer sur une période d'un an. A votre disposition, un placement sans risque de taux d'intérêt annuel $r = 5\%$, un actif risqué de prix $S_0 = 20$ et un Call de prix $C_0 = 8$, d'échéance $T = 1$ et de prix d'exercice $K = 16$. Considérons les trois stratégies d'investissement suivantes.

- A Investir les 1000 euros en actions.
 - B Investir les 1000 euros en Calls.
 - C Investir 100 euros en Calls et le reste en actif sans risque.
- (a) Calculer le taux de rentabilité de chaque stratégie en fonction du prix S_1 de l'actif risqué en $T = 1$.
- (b) Pour chaque stratégie, calculer la ou les valeurs de S_1 pour lesquelles le rendement est nul.
- (c) Pour quelles valeurs de S_1
- i. la stratégie A a un meilleur rendement que les deux autres stratégies ?
 - ii. la stratégie B a un meilleur rendement que les deux autres stratégies ?
 - iii. la stratégie C a un meilleur rendement que les deux autres stratégies ?
- (d) Tracer sur le même graphique les taux de rentabilité des trois stratégies en fonction de S_1 .
- (e) Quelles sont les anticipations de l'investisseur qui choisit l'une de ces stratégies d'investissement ? Comparer les avantages et les inconvénients des trois stratégies.

Exercice 2 (4 points)

Soient P_1 , P_2 et P_3 , les prix de trois Puts européens ayant, respectivement, pour prix d'exercice K_1 , K_2 et K_3 , avec $K_3 > K_2 > K_1$ et $K_2 = (K_1 + K_3)/2$. Ces trois options ont la même date d'exercice. Considérer la stratégie : acheter une option de prix d'exercice K_1 , acheter une option de prix d'exercice K_3 et vendre deux options de prix d'exercice K_2 .

- (a) Représenter le payoff de cette stratégie à la date d'exercice en fonction du prix S_T de l'actif sous-jacent.
- (b) Montrer que $P_2 \leq \frac{1}{2}(P_1 + P_3)$.

Exercice 3 (6 points)

On considère le modèle binomial à trois périodes pour le prix d'une action avec les paramètres suivants : $S_0 = 100$, le prix peut monter ou baisser de 10% à chaque période, le taux sans risque sur une période est de 6%.

- (a) Calculer les prix en $t = 0$ d'un Put européen et un Put américain de maturité $T = 3$ et de prix d'exercice $K = 95$.
- (b) Supposons que le prix de l'action suit la trajectoire suivante : $\{100, 90, 81, 89.1\}$. Combien et à quel moment gagne l'acheteur du Put américain s'il suit la stratégie d'exercice optimale ?