Licence 2 mention Économie parcours économie et mathématique et informatique
Épreuve : ANALYSE NUMÉRIQUE–I. SCHINDLER-Code : L2-S4-6
Mercredi 13 juin 2018

Exercice 1

Soit $P_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} u_i$, avec $u_i > 0$. Supposons que $\Delta u_i = 0$ où $\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} |x - x'|$ et x' est la valeur approchée de x utilisé par l'ordinateur.

1. Justifier que $\Delta P_n \leq u_n \Delta P_{n-1} + \epsilon P_n$ où ϵ est la précision relative.
2. Montrer que $\Delta P_n \leq (n-1)\epsilon P_n$.

Exercice 2

Soient $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ et

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & \mathbb{R}_n[x] \mapsto \mathbb{R}^{n+1} \\ & p_n(x) \mapsto [p_n(x_0), \ldots, p(x_n)] \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire. En déduire que ϕ est surjective si et seulement si ϕ est injective.
2. Montrer que ker $\phi = \{0\}$. En déduire l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Exercice 3

Soient $(x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. Quelle conditions doivent vérifier x_1, x_2, λ_1 et λ_2 pour que T soit une méthode d'intégration

1. d'ordre au moins 0 ?
2. d'ordre au moins 1 ?
3. d'ordre au moins 2 ?

Exercice 4

Soit $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{x-2} - x$. Valeurs utiles : $e \approx 2,7$, $\ln 2 \approx 0,7$, $\ln 3 \approx 1,1$.

1. Étudier les variations de $f(x)$ et trouver le nombre de racines de $f(x)$.
2. Localiser les racines dans des intervalles de la forme $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une fonction $\phi(x)$ (autre que la fonction $\phi_N(x)$ obtenue par la méthode de Newton) pour laquelle les racines de $f(x)$ sont les points fixes de $\phi(x)$.
4. Classifier la plus grande racine a (attractive, répulsive, etc.) par rapport à $\phi(x)$.
5. Définir une suite (x_p) qui converge vers a en spécifiant x_0.
6. Majorer $|x_p - a|$.
7. Calculer $\phi_N(x)$ de la méthode de Newton.
8. Calculer x_1 en utilisant le x_0 spécifié plus haut.