Année universitaire 2017-2018

Session 1 - Semestre 3

Licence 2 mention Économie parcours Économie–Mathématiques et Informatique appliquées
ÉPREUVE : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES
Date de l'épreuve : **Mercredi 13 Décembre 2017**
Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : aucun

Nombre de pages (y compris page de garde) : 3

Le sujet comporte quatre exercices
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

Exercice 1. On pose :

$$B = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y + 1| \leqslant 1\Big\},$$
$$C = \Big\{(x, -x); 0 < x < 1\Big\},$$
$$\Omega = B \setminus C = B \cap C^{\mathrm{c}}.$$

1) Représenter graphiquement l'ensemble Ω.
2) Déterminer si Ω est un ouvert, fermé de $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer $\overline{\Omega}$.

Exercice 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \dfrac{1}{x + y}, & \text{si } x + y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$$

Soit Ω le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par,

$$\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \neq 0\big\}.$$

1) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2) Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.
3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
4) Pour tout $(x, y) \in \Omega$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
5) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
6) Montrer que f n'est de classe $\mathcal{C}^1$ en aucun point de Ω^{c}.

Exercice 3. On pose pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Soient $a = (4,3)$ et $u = (1,1)$. Montrer, en utilisant uniquement la définition de dérivée directionnelle, que f admet une dérivée en a suivant la direction u et déterminer sa valeur. On mettra tous les détails du calcul et l'on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible composée de produits de nombres premiers. Par exemple, si le résultat est $\dfrac{16}{150}$, écrire : $\dfrac{2^3}{3 \times 5^2}$.

Exercice 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.
5) La fonction f est-elle différentiable deux fois à l'origine ?