Année universitaire 2017-2018
Session 1 – Semestre 3
Licence 2 mention "Economie parcours économie-mathématiques et informatique appliquées"

EPREUVE : ALGÈBRE APPROFONDIE

ENSEIGNANT : A. BLANCHET

Date de l'épreuve : Lundi 11 décembre 2017 – Durée de l'épreuve : 1h30

- Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 2.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Produit scalaire)

Soit

$$b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 \end{array}$$

1. Montrer que b défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la représentation matricielle de la forme quadratique associée à b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la représentation matricielle de b dans la base

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire b.
5. Déterminer la représentation matricielle de b dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 2 (Projection orthogonale)

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Considérons

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0\}$$

1. Caculer la distance de $(1, -1, 0)$ à F.
2. Caculer la distance de $(1, 0, 0)$ à F.

Exercice 3 (Réduction d'endomorphisme)

Considérons le système

$$\left\{\begin{array}{lclll} x_{n+1} & = & x_n & +y_n & \\ y_{n+1} & = & x_n & +2\,y_n & +z_n \\ z_{n+1} & = & & y_n & +z_n \end{array}\right.$$

où x_0, y_0 et z_0 sont des réels donnés. Exprimer explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 4 (Cours)

On admettra que tout matrice symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle. Montrer que tout matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Exercice 5 (Etoile)

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit salaire usuel. Considérons l'application linéaire

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x/3 - y/3 - z/3, -x/3 + 2y/3 - z/3, -x/3 - y/3 + 2z/3) \end{array}$$

1. Montrer que p est une projection orthogonale et la caractériser.
2. Déterminer une base dans laquelle la représentation matricielle de p est diagonale.