Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2017-2018

Session 1 - Semestre 3

Licence 2 mention Economie parcours économie-gestion
Licence 2 mention Economie parcours économie-droit

EPREUVE : MATHEMATIQUES 3

Enseignant : O. FAUGERAS

Date de l'épreuve : **13/12/2017**

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Néant

Liste des matériels autorisés : Néant

Nombre de pages : 4 + page de garde

Université Toulouse 1 Capitole - TSE
Licence 2 mention Economie parcours économie-gestion
Licence 2 mention Economie parcours économie-droit
Epreuve : Mathématiques 3 - Code : L2-S3
1ère Session 2017-2018
Durée de l'épreuve : 1h30

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Pour chaque exercice, cocher la bonne réponse sur la grille en page 4.

Exercice 1 : DLs

1. Au voisinage de zéro,
   a) $\ln(\cos x) = -x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)$
   b) $\ln(\cos x) = -x^2/2 + x^4/4 + o(x^4)$
   c) $\ln(\cos x) = x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$
   d) $\ln(\cos x) = -x^2/2 + x^4/6 + o(x^4)$
2. Soit
$$f(x) = \frac{(1-x)\sqrt{x}}{\ln x}, \quad x > 0.$$
   Au voisinage de un,
   a) $f(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + o((x-1)^3)$
   b) $f(x) = -1 - (x-1) - \frac{(x-1)^2}{24} + o((x-1)^3)$
   c) $f(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3)$
   d) $f(x) = -1 - 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{12} + o((x-1)^3)$
3. Au voisinage de l'infini, la courbe d'équation
$$y = \frac{x}{\sin(\frac{1}{x})},$$
   a) admet une courbe asymptote d'équation $y = x$ et est au-dessous de cette dernière.
   b) admet une courbe asymptote d'équation $y = x$ et est au-dessus de cette dernière.
   c) admet une courbe asymptote d'équation $y = x^2 + 1/6$ et est au-dessus de cette dernière.
   d) admet une courbe asymptote d'équation $y = x^2 + 1/6$ et est au-dessous de cette dernière.

Exercice 2 : Produit scalaire et intégration

On considère l'espace vectoriel $E := \{P, P$ polynôme de degré au plus $1\}$ des polynômes à coeficients réels de degré au plus 1, que l'on peut considérer comme l'ensemble des fonctions $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui s'écrivent, pour $X \in \mathbb{R}$,
$$P(X) = aX + b, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$
On peut aussi considérer E comme l'espace vectoriel engendré par les fonctions $P_0 : X \to 1, P_1 : X \to X : E = vect(P_0, P_1)$.

On définit sur E le produit scalaire $\langle.|.\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, par
$$(P, Q) \to \langle P|Q\rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Soient P_0, P_1 les polynômes définis par $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, orthonormaliser (P_0, P_1) en une base (Q_0, Q_1) orthonormale de E.
   a) $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = X - 1/2$
   b) $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = \sqrt{2}(X-1)$
   c) $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = X + 1$
   d) $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = \sqrt{3}(2X-1)$

Exercice 3 : Puissances de Matrices

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

1. Soient $e_1 = (1,-1)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (-2,1)$, $e_4 = (1,1)$, $e_5 = (1,0)$. Laquelle de ces propositions est vraie ?

   (a) A est diagonalisable dans la base (e_1, e_2)

   (b) A est diagonalisable dans la base (e_2, e_3)

   (c) A est diagonalisable dans la base (e_3, e_4)

   (d) A est diagonalisable dans la base (e_4, e_5)

   (e) A est diagonalisable dans la base (e_2, e_5)

   (f) A n'est pas diagonalisable.

2. Calculer A^{100} (Conseil : via Hamilton-Cayley).

   (a) $A^{100} = \frac{2^{100}-4}{3}A + \frac{4^{100}-4}{3}I$

   (b) $A^{100} = \frac{4^{100}-1}{3}A + \frac{4-4^{100}}{3}I$

   (c) $A^{100} = \frac{4^{100}-4}{3}A + \frac{4-4^{100}}{3}I$

   (d) $A^{100} = \frac{4^{100}-1}{3}A + \frac{1-4^{100}}{3}I$

Exercice 4 : Diagonalisation

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

1. A admet pour valeurs propres

   (a) 1 comme valeur propre simple, -2 comme valeur propre double ;

   (b) -2 comme valeur propre simple, 1 comme valeur propre double ;

   (c) 0, 1 et -2.

2. Soient $e_1 = (1,-1,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (1,1,1)$, $e_4 = (1,0,-1)$, $e_5 = (1,1,2)$. $e_6 = (0,1,-1)$.Pour une valeur propre λ, on note E_λ l'espace propre associé. Laquelle de ces propositions est vraie ?

   (a) $E_0 = vect\{e_3\}$, $E_{-2} = vect\{e_4\}$, $E_1 = vect\{e_2\}$,

   (b) $E_1 = vect\{e_3\}$, $E_{-2} = vect\{e_4, e_6\}$,

   (c) $E_0 = vect\{e_4\}$, $E_{-2} = vect\{e_5\}$, $E_1 = vect\{e_6\}$,

   (d) $E_1 = vect\{e_3\}$, $E_{-2} = vect\{e_4, e_5\}$,

   (e) $E_1 = vect\{e_4\}$, $E_{-2} = vect\{e_5, e_6\}$,

   (f) $E_1 = vect\{e_1, e_3\}$, $E_{-2} = vect\{e_2\}$,

3. Soient $f_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $f_2 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$,$f_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$,$f_4 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$,$f_5 = (1/\sqrt{6}, \sqrt{1/6}, 2/\sqrt{6})$, $f_6 = ((1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}))$.
   Laquelle de ces propositions est vraie ?

   (a) A est diagonalisable dans la base orthonormale (f_1, f_4, f_5)

   (b) A est diagonalisable dans la base orthonormale (f_1, f_2, f_3)

   (c) A est diagonalisable dans la base orthonormale (f_2, f_3, f_4)

   (d) A est diagonalisable dans la base orthonormale (f_1, f_2, f_4)

   (e) A est diagonalisable dans la base orthonormale (f_3, f_5, f_6)

   (f) A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5 : Formes Quadratiques

Soit la forme quadratique dans $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

1. Q est
   (a) définie-positive
   (b) définie-négative
   (c) semi-définie-positive
   (d) indéfinie
   (e) semi-définie-négative

Grille de réponses

Question numéro	Réponse
Exercice 1	
Question 1	(a) (b) (c) (d)
Question 2	(a) (b) (c) (d)
Question 3	(a) (b) (c) (d)
Exercice 2	
Question 1	(a) (b) (c) (d)
Exercice 3	
Question 1	(a) (b) (c) (d) (e) (f)
Question 2	(a) (b) (c) (d)
Exercice 4	
Question 1	(a) (b) (c)
Question 2	(a) (b) (c) (d) (e) (f)
Question 3	(a) (b) (c) (d) (e) (f)
Exercice 5	
Question 1	(a) (b) (c) (d) (e)

Coller une étiquette ici :