

Année universitaire 2017-2018

Session 2 - Semestre 2

Licence 1 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique Appliquées

Epreuve : FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE

Enseignant : C. LAFFONT

Date de l'épreuve : 15/06/2018

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : calculatrice non programmable

Nombre de pages (y compris page de garde) : 2

Quatre exercices indépendants

Exercice I (4 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} : $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^{-\alpha x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 1) Déterminer le nombre α pour que f soit continue au point 0.
- 2) Etudier alors la dérivabilité de f au point 0.

Exercice II (4 points)

1) a) On considère la fonction F définie sur $]1, 2]$ tel que $F(x) = \int_x^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$

Calculer $F(x)$ par changement de variable

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$ et en déduire $F = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$

2) a) On considère la fonction G définie sur $[0, +\infty[$ tel que $G(x) = \int_0^{x \ln(1+t)} \frac{dt}{(1+t)^2}$

En effectuant une intégration par parties calculer $G(x) = \int_0^{x \ln(1+t)} \frac{dt}{(1+t)^2}$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et en déduire $G = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} dt$

Exercice III (5 points)

On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$: $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$

- 1) Montrer que $F(x) \geq 0 \forall x \in [0, +\infty[$
- 2) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$
- 3) Calculer $F'(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$
- 4) Déterminer le Développement Limité de $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ d'ordre 2 au voisinage du point 0
- 5) En déduire le Développement Limité de $F(x)$ d'ordre 3 au point 0.

Exercice IV (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} : f(x) = xe^{-2x}$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Déterminer le ou les points critiques de la fonction f .
- 3) Étudier la concavité-convexité de la fonction f et déterminer les éventuels points d'inflexion de f
- 4) Déterminer le ou les éventuels extremum de f en précisant leur nature.
- 5) Tracer la courbe représentative de la fonction f
- 6) Soit X un nombre réel fixé, $X > 0$
Calculer $F(X) = \int_0^X xe^{-2x} dx$ en effectuant une intégration par parties.
Indiquer le nombre $F(X)$ sur la courbe représentative de la fonction f
- 7) Déterminer $F = \lim_{X \rightarrow +\infty} F(X)$