

Année universitaire 2017-2018

Session 1 - Semestre 2

Licence 1 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique Appliquées

Epreuve : FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE

Enseignant : C. LAFFONT

Date de l'épreuve : 03 mai 2018

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice scientifique non programmable

Nombre de pages (y compris page de garde) : 2

Exercice I (9 points)

On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$: $f(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{t-1} & \text{si } t > 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$

- 1) Montrer que la fonction f est continue au point 1
- 2) Soit la fonction F définie sur $]1, +\infty[$: $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt$
 - a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$
 - b) Calculer $F'(x)$, $\forall x \in]1, +\infty[$
 - c) En déduire les variations de F sur $]1, +\infty[$
- 3) a) En faisant le changement de variable $u(t) = t-1$, déterminer le Développement Limité de $f(t)$ d'ordre 2 au point 1
 b) Par intégration du Développement Limité de $f(t)$ obtenir $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$
- 4) a) Montrer que $\forall t > e : \frac{1}{t} < \frac{\ln t}{t-1}$
 b) Montrer que $\forall x > e : \ln x < F(x)$
 c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

Exercice II (4 points)

- 1) En effectuant le changement de variable approprié calculer $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$
- 2) En intégrant par parties calculer $K = \int_0^1 t e^{-2t} dt$

Exercice III (3 points)

On considère la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}$

Calculer en justifiant les étapes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ par les intégrales de Riemann

Exercice IV (4 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

Déterminer les extremum de f sur \mathbb{R} en précisant leur nature.