Année universitaire 2017-2018
Session 2 – Semestre 2

Licence 1 mention Économie parcours économie et mathématiques et informatique appliquées

Épreuve : Algèbre linéaire

Enseignant : A. Blanchet

Vendredi 15 juin 2018 – Durée de l'épreuve : 1h30 – 2 pages

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies.
- Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, x - y - z, x - y + z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la représentation matricielle A de f dans les bases canoniques.
3. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
4. Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.
5. Déterminer une famille libre de $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}\,(f)$.
7. Considérons le système linéaire dont la représentation matricielle est $AX = B$.
   (a) Discuter suivant la valeur des paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ le nombre de solutions du système lorsque
   $$B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
   (b) Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions lorsque
   $$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y + z = 0 \text{ et } 3x + 2y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 3

Soit $\mathcal{H}_\lambda := \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ où les coordonnées de u_1, u_2, u_3 et u_4 dans la base canonique $\mathcal{C}$ sont

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \quad u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad u_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

1. Déterminer les valeurs de λ pour lequelles $\mathcal{H}_\lambda$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. On prend maintenant $\lambda = 1$. Soit x le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ sont données par
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$
Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{H}_1$.
3. On prend toujours $\lambda = 1$. Soit y le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{H}_1$ sont données par
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{H}_1}$$
Déterminer les coordonnées de y dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 4

On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme x_0, y_0 et z_0 et la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n \\ y_{n+1} = -y_n + z_n \\ z_{n+1} = -z_n \ . \end{cases}$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n et de x_0, y_0 et z_0.