Année universitaire 2017-2018

Session 1 – Semestre 2

Licence 1 mention ÉCONOMIE parcours économie et mathématiques et informatique appliquées

ÉPREUVE : ALGÈBRE LINÉAIRE

ENSEIGNANT : A. BLANCHET

Lundi 7 mai 2018 – Durée de l'épreuve : 1h30 – 2 pages

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies.
- Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soients

$$E := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + 2z - t = 0 \quad \text{et} \quad x + y - t = 0\}$$

et

$$F := \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de l'espace vectoriel dans lequel E et F sont supplémentaires.
3. Déterminer la représentation matricielle dans les bases canoniques de la projection sur E de direction F.
4. Déterminer la représentation matricielle dans les bases canoniques de la projection sur F de direction E.
5. Déterminer la représentation matricielle dans les bases canoniques de la symétrie par rapport à E de direction F.
6. Déterminer la représentation matricielle dans les bases canoniques de la symétrie par rapport à F de direction E.

Exercice 2

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, -2x + 2z, -x - y + 3z) \, . \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, dans les bases canoniques, la représentation matricielle de f.
3. Déterminer la représentation matricielle de f dans une base de $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
4. En déduire la nature géométrique de f dans les bases canoniques.
5. Discuter suivant les valeurs des paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le nombre de solutions de $f(x, y, z) = (a, b, c)$.

Exercice 3

Énoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.

Exercice 4

1. Soit E un espace vectoriel. Montrer que E^* est un espace vectoriel.
2. Déterminer la base duale de

$$F := \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$