UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE
ECOLE D'ÉCONOMIE DE TOULOUSE

Année universitaire 2017-2018

Session 1

Semestre 1

Licence 1 mention Economie parcours économie-mathématiques et informatique appliquées

EPREUVE : LES FONDAMENTAUX EN MATHEMATIQUES

Date de l'épreuve : 06/06/2018

Durée de l'épreuve : 1h30

liste des documents autorisés : aucun

liste des matériels autorisés : aucun

nombre de pages : 2

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une relation $\mathcal{R}$ transitive sur un ensemble E.
2. Donner la définition d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers l.
3. Donner la définition d'une application injective f d'un ensemble E dans un ensemble F.
4. Donner la définition d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ tendant vers l en $-\infty$.
5. Donner la définition d'un groupe.

Exercice 2. Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.
Une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ est continue en un point a de D si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergente vers a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.

Exercice 3. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1. $A_1 = \{\ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x + y - 5z = 0\ \}$.
2. $A_2 = \{\ X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \exists t \in \mathbb{R},\ \forall 1 \leq i \leq n,\ x_i = i\,t\ \}$.
3. $A_3 = \{\ f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\quad \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \cos(\lambda x)\}$.

Exercice 4.
On munit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ des deux lois de composition internes suivantes :
$\forall (p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ \ \forall (p', q') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$(p, q) \oplus (p', q') = (p + p', q + q')$$
$$(p, q) \otimes (p', q') = (pp', pq' + qp' + qq')$$

Montrer que $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ est un anneau unitaire commutatif. Est-il un corps ?

Exercice 5.
On considère l'ensemble :

$E = \{\ f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = ax^2 + (a+b)x + b\ \}$.

On définit l'application F de $(E, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$ par $F(f) = (f(1), f(-1))$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. Montrer que F est linéaire.
3. F est-elle injective ? surjective ?