1:1

Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2017-2018

Session 2 - Semestre 1

Licence 1 mention Économie parcours Économie–Gestion
Licence 1 mention Économie parcours Économie–Droit
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES 1
Enseignants : C.BRUCHE / L.BAKRI
Date de l'épreuve : **Juin 2018**
Durée de l'épreuve: 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : aucun. Calculatrice interdite.

Nombre de pages (y compris page de garde): 10 pages Recto - Verso

Consignes

- **Détacher la première feuille du sujet (pages 1 et 2) comprenant la page de garde, les énoncés des exercices 1 et 2, et le formulaire.**
- **Noircir les 4 derniers chiffres de votre numéro d'anonymat dans la grille en page 3 et coller votre troisième étiquette dans le cadre. Attention : il s'agit du numéro d'ANONYMAT, pas de votre numéro d'étudiant.**
- **Composer toutes vos réponses sur les feuilles de composition (pages 3 à 10).**
- **Rendre l'ensemble de ces feuilles de composition à la fin de l'épreuve (pas de copie).**
- **Pour les exercices de type QCM, les questions faisant apparaître le symbole (♣) peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.**

Ex 1. Soit $f : x \mapsto 2 + x - \dfrac{1}{x^2}$. On a donc $D_f = \mathbb{R}^\star$. Justifier soigneusement toutes vos réponses.

(a) Calculer $f(-1)$.

(b) Montrer que $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$.

(c) En déduire qu'il existe $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(d) La fonction f est-elle injective ?

(e) Montrer que si $y \geq 1$ alors $f(y) > y$ et $f(\frac{1}{2}) < y$.

(f) En déduire que pour tout $y \geq 1$, il existe $x \in]\frac{1}{2}, y[$ tel que $y = f(x)$.

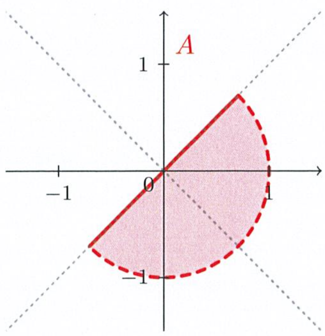
Ex 2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{4}x^4 - 2x^2$. Justifier soigneusement toutes vos réponses.

(a) Déterminer les éventuels minimums et maximums, locaux, globaux, de la fonction f.

(b) Soit $g : \begin{array}{ccc} [-2;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. Déterminer, s'ils existent, le maximum global et le minimum global de g.

Formulaire

- Sur le dessin ci contre, est représenté en rouge un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, appelé A ainsi que les droites d'équations $y + x = 0$ et $y - x = 0$.



- On rappelle la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = l$: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists d \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < d \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

- On considère la fonction $h : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < -1, \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

Feuilles de composition

$\square$0 $\square$0 $\square$0 $\square$0
$\square$1 $\square$1 $\square$1 $\square$1
$\square$2 $\square$2 $\square$2 $\square$2
$\square$3 $\square$3 $\square$3 $\square$3
$\square$4 $\square$4 $\square$4 $\square$4
$\square$5 $\square$5 $\square$5 $\square$5
$\square$6 $\square$6 $\square$6 $\square$6
$\square$7 $\square$7 $\square$7 $\square$7
$\square$8 $\square$8 $\square$8 $\square$8
$\square$9 $\square$9 $\square$9 $\square$9

$\longleftarrow$ codez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'anonymat ci-contre en noircissant les cases correspondantes, et collez votre étiquette ci-dessous.

..... Coller votre étiquette ici .....

Ex 1. Soit $f : x \mapsto 2 + x - \dfrac{1}{x^2}$. On a donc $D_f = \mathbb{R}^\star$. Justifier soigneusement toutes vos réponses.

Question 1 a) Calculer $f(-1)$. Ne pas cocher : $\square$z $\square$u $\square$d

Question 2 b) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) f(1) < 0$. Ne pas cocher : $\square$z $\square$u $\square$d

Question 3 c) En déduire qu'il existe $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$. .... Ne pas cocher : $\square$z $\square$u $\square$d

Question 4 d) La fonction f est-elle injective ?

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 5 e) Montrer que si $y \geq 1$ alors $f(y) > y$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) < y$.

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 6 f) En déduire que pour tout $y \geq 1$, il existe $x \in \left]\frac{1}{2}, y\right[$ tel que $y = f(x)$.

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Ex 2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{4}x^4 - 2x^2$. Justifier soigneusement toutes vos réponses.

Question 7 a) Déterminer les éventuels minimums et maximums, locaux, globaux, de la fonction f.

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d ☐t ☐q

Question 8 b) Soit $g : \begin{array}{rcl} [-2;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. Déterminer, s'ils existent, le maximum global et le minimum global de g. .... Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 9 ♣ Le prof, qui ne se trompe jamais, affirme " Si un-e étudiant-e a la note 20 à ce devoir de Math, alors il/elle a bien travaillé." Amy n'a pas bien travaillé et obtient la note N_A à ce devoir. Bob a bien travaillé et obtient la note N_B à ce devoir. Que peut-on déduire de l'affirmation du prof ?

- ☐ Aucune des autres réponses
- ☐ $N_A < 20$
- ☐ $N_A = 20$
- ☐ $N_B = 20$
- ☐ $N_B < 20$

Question 10 ♣ Soient f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 4$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -4$, g est continue sur $\mathbb{R}$, et $g(0) = 0$, . Lesquelles de ces fonctions sont continues en 0 ?

- ☐ f
- ☐ g
- ☐ $|f|$
- ☐ gf
- ☐ $\frac{1}{f}$
- ☐ $\frac{g}{f}$
- ☐ $\frac{1}{g}$
- ☐ f^2

Question 11 Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto 3f(3x) - f(x)$. Pour tout x réel, laquelle de ces expressions égale $g'(x)$?

- ☐ $9f'(3x) - f'(x)$
- ☐ $f'(3x) - f'(x)$
- ☐ $3 + 9f'(3x) - f'(x)$
- ☐ $3f'(x) - f'(x)$
- ☐ $3f(3x) + 9f'(3x) - f'(x)$
- ☐ $9f'(x) - f'(x)$
- ☐ $3f'(3x) - f'(x)$
- ☐ $9f'(3x) - f'(3x)$
- ☐ $3f'(3x) - f'(3x)$

Question 12 Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{2x^2 - 1}\right)$. On considère les fonctions $u : x \mapsto 2x - 1$, $v : x \mapsto \frac{1}{x}$, $w : x \mapsto \ln(x)$, et $z : x \mapsto x^2$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☐ $f = v \circ w \circ u \circ z$
- ☐ $f = w \circ v \circ u \circ z$
- ☐ $f = z \circ w \circ v \circ u$
- ☐ $f = z \circ u \circ v \circ w$
- ☐ $f = w \circ v \circ z \circ u$
- ☐ $f = w \circ z \circ u \circ v$
- ☐ $f = v \circ w \circ z \circ u$
- ☐ $f = w \circ u \circ v \circ z$

Question 13 Soit f une fonction réelle. Donner la définition de "f est dérivable en 8".

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 14 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(1) = 1$. Quelle est la valeur de $\lim_{x\to 1} \frac{xf(1) - f(x)}{x - 1}$?

- ☐ $\frac{f(1) - 1}{f(1)}$
- ☐ $f(1) - 1$
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ $f(1)$
- ☐ $\frac{1 - f(1)}{f(1)}$
- ☐ $1 - f(1)$

Question 15 Écrire la négation de : " $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, xy = 2 \Rightarrow x^2 < 1$".

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 16 Donner une définition pour l'ensemble A représenté en rouge en page 2.

Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 17 La fonction h, définie page 2,

- ☐ est continue en -1 mais n'est pas continue en 1
- ☐ est continue en 1 et est continue en -1
- ☐ n'est ni continue en 1 ni continue en -1
- ☐ est continue en 1 mais n'est pas continue en -1

Question 18 Quelle est la valeur de $\lim_{x \to -\infty} 3x - \sqrt{9x^2+3}$?

☐ -9 ☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $-\infty$ ☐ 3 ☐ -6 ☐ -3

Question 19 Quelle est la valeur de $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 3x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$?

☐ 1 ☐ 3 ☐ $+\infty$ ☐ $-\dfrac{1}{3}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ $-\infty$ ☐ $\dfrac{1}{2}$

Question 20 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 5$. Écrire la définition de $\lim_{x \to 5} f(x) = 10$ sous forme de phrase mathématique quantifiée, sans utiliser la lettre f. (cf. rappel en page 2). Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

Question 21 Démontrer la phrase précédente. .... Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d ☐t ☐q