Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

**Année universitaire 2017-2018**

**Session 1 - Semestre 1**

Licence 1 mention Économie parcours Économie–Gestion

Licence 1 mention Économie parcours Économie–Droit

**ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES 1**

**Enseignants : C.BRUCHE / L.BAKRI**

Date de l'épreuve : **Mardi 12 Décembre 2017**

Durée de l'épreuve: 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : aucun. Calculatrice interdite.

Nombre de pages (y compris page de garde): 4 pages Recto - Verso

## Consignes

- **Rédiger les Ex 1 et Ex 2 sur la copie d'examen (ne pas oublier d'y coller deux étiquettes).**
- **Noircir les 4 derniers chiffres de votre numéro d'anonymat dans la grille en page 3 et coller votre troisième étiquette dans le cadre. Attention : il s'agit du numéro d'ANONYMAT, pas de votre numéro d'étudiant.**
- **Détacher la deuxième feuille du sujet (page 3 et 4) et traiter sur celle-ci le reste des exercices.**
- **Glisser cette feuille dans votre copie et rendre l'ensemble à la fin de l'épreuve.**
- **Barème (susceptible d'être modifié) : Ex 1 et Ex 2 sur 3 pts chacun, Ex 3 à Ex 14 sur 1pt chacun, Ex 15 sur 2pts.**
- **La démonstration demandée à l'Ex 15 est à écrire sur le sujet, en utilisant le reste de la page.**
- **Pour les exercices de type QCM, les questions faisant apparaître le symbole (♣) peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.**

**Ex 1.** Soit $f : x \mapsto 2x + 1 - \dfrac{1}{x^3}$. On a donc $D_f = \mathbb{R}^\star$. Justifier soigneusement toutes vos réponses.

(a) Calculer $f(-1)$.

(b) Montrer que $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$.

(c) En déduire qu'il existe $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(d) La fonction $f$ est-elle injective ?

(e) Montrer que si $y \geq 1$ alors $f(y) > y$ et $f(\frac{1}{2}) < y$.

(f) En déduire que pour tout $y \geq 1$, il existe $x \in ]\frac{1}{2}, y[$ tel que $y = f(x)$.

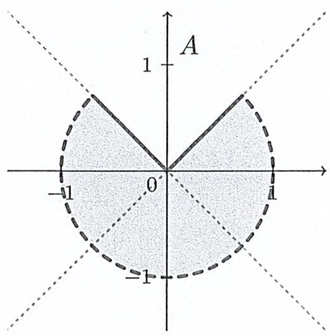
**Ex 2.** Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^5}{5} - x^3 + x^2$. Justifier soigneusement toutes vos réponses.

(a) Déterminer les éventuels minimums et maximums, locaux, globaux, de la fonction $f$.

(b) Soit $g : \begin{array}{ccc} [-2;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. Déterminer, s'ils existent, le maximum global et le minimum global de $g$.

---

## Formulaire




- Sur le dessin ci contre, est représenté en rouge un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, appelé $A$ ainsi que les droites d'équations $y + x = 0$ et $y - x = 0$.

- On rappelle la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists d \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < d \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

- On considère la fonction $h : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1, \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9

$\longleftarrow$ codez les quatre derniers chiffres de votre numéro d'anonymat ci-contre en noircissant les cases correspondantes, et collez votre étiquette ci-dessous.

..... Coller votre étiquette ici .....

**Ex 1**

........................................................ Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d ☐t ☐q ☐c ☐s

**Ex 2**

........................................................ Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d ☐t ☐q ☐c ☐s

---

**Ex 3** ♣ Le prof, qui ne se trompe jamais, affirme " Si un-e étudiant-e a la note 0 à ce devoir de Math, alors il/elle n'a pas travaillé." Amy n'a pas travaillé et obtient la note $N_A$ à ce devoir. Bob a travaillé et obtient la note $N_B$ à ce devoir. Que peut-on déduire de l'affirmation du prof ?

☐ $N_B = 0$ ☐ Aucune des autres réponses ☐ $N_A > 0$ ☐ $N_A = 0$ ☐ $N_B > 0$

**Ex 4** Quelle est la valeur de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ ?

☐ $4$ ☐ $-\infty$ ☐ $-\dfrac{1}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ $+\infty$ ☐ $\dfrac{3}{4}$ ☐ $0$ ☐ $-4$

**Ex 5** Écrire la négation de : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, x^2 < 1 \Rightarrow xy = 2$". Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

**Ex 6** Quelle est la valeur de $\lim\limits_{x\to -\infty} 4x - \sqrt{16x^2 + 4}$ ?

☐ $-4$ ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ $4$ ☐ $-16$ ☐ $-12$ ☐ $0$

**Ex 7** La fonction $h$, définie page 2,

☐ n'est ni continue en 1 ni continue en $-1$
☐ est continue en $-1$ mais n'est pas continue en 1
☐ est continue en 1 et est continue en $-1$
☐ est continue en 1 mais n'est pas continue en $-1$

**Ex 8** Donner une définition pour l'ensemble $A$ représenté en rouge en page 2. Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

**Ex 9** Soit $f$ une fonction réelle. Donner la définition de "$f$ est dérivable en 6". Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

**Ex 10** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(2) = 2$. Quelle est la valeur de $\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$ ?

☐ $f(2)$ ☐ $\frac{2-f(2)}{2}$ ☐ $\frac{f(2)-2}{2}$ ☐ $2$

☐ $0$ ☐ $f(2)-2$ ☐ $f(2)-4$

**Ex 11** ♣ Soient $f$ et $g$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $g(0) = 5$, et $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Lesquelles de ces fonctions sont continues en 0 ?

☐ $g$ ☐ $f$ ☐ $|g|$ ☐ $fg$ ☐ $\frac{1}{g}$ ☐ $\frac{f}{g}$ ☐ $\frac{1}{f}$ ☐ $g^2$

**Ex 12** Soient $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto 4f(4x) - f(x)$. Pour tout $x$ réel, laquelle de ces expressions égale $g'(x)$ ?

☐ $16f'(4x) - f'(x)$ ☐ $16f'(x) - f'(x)$ ☐ $f'(4x) - f'(x)$

☐ $4 + 16f'(4x) - f'(x)$ ☐ $16f'(4x) - f'(4x)$ ☐ $4f'(4x) - f'(x)$

☐ $4f'(x) - f'(x)$ ☐ $4f(4x) + 16f'(4x) - f'(x)$ ☐ $4f'(4x) - f'(4x)$

**Ex 13** Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$. On considère les fonctions $u : x \mapsto 2x+1$, $v : x \mapsto \frac{1}{x}$, $w : x \mapsto \ln(x)$, et $z : x \mapsto x^2$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

☐ $f = v \circ w \circ z \circ u$ ☐ $f = z \circ w \circ v \circ u$ ☐ $f = v \circ w \circ u \circ z$ ☐ $f = w \circ v \circ u \circ z$

☐ $f = z \circ u \circ v \circ w$ ☐ $f = w \circ u \circ v \circ z$ ☐ $f = w \circ v \circ z \circ u$ ☐ $f = w \circ z \circ u \circ v$

**Ex 14** On considère la fonction $f : x \mapsto x + 4$. Écrire la définition de $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$ sous forme de phrase mathématique quantifiée, sans utiliser la lettre $f$. (cf. rappel en page 2). Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d

**Ex 15** Démontrer la phrase précédente (sur cette fin de page).

........................................................................ Ne pas cocher : ☐z ☐u ☐d ☐t ☐q