Année universitaire 2016-2017

Session 1 - Semestre 2

Licence 1 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique Appliquées

Epreuve : FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE

Enseignant : C. LAFFONT

Date de l'épreuve : 10 mai 2017

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Aucun

Nombre de pages (y compris page de garde) : 2

Quatre exercices indépendants

Exercice I : Fonction *(5 points)*

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{x^2} - \frac{1}{6}x & si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$

1) Ecrire le Développement Limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de e^x
2) En déduire :
   a) le Développement Limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de $e^x - x - 1$
   b) le Développement Limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\frac{e^x - x - 1}{x^2}$
   c) le Développement Limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$
3) Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$
4) Montrer que la fonction f admet un extremum au point 0 dont on précisera la nature.

Exercice II : Somme de Riemann *(4 points)*

Déterminer la limite suivante , si elle existe ,par la définition d'une intégrale de Riemann :

$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \right)$

Exercice III : Calcul intégral (5 points)

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{1}{2}x}\, dx \quad \forall n \in N$

1) Calculer I_0
2) En effectuant une intégration par parties ,exprimer I_{n+1}en fonction de I_n
3) En déduire $J = \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$

Exercice IV : Fonction définie par une intégrale *(6 points)*

On considère la fonction F définie sur $]1, +\infty[$:

$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} dt$

1) Montrer sans calculer F(x) que $F(x) > 0 \quad \forall x > 1$
2) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$
3) En déduire le sens de variation de F
4) Montrer que $F(x) \leq \int_1^x \frac{dt}{(1+t)^2} \quad \forall x > 1$
5) Calculer $\int_1^x \frac{dt}{(1+t)^2}$
6) Déduire de ce qui précède un résultat pour $\lim_{x \to +\infty} F(x)$