Année universitaire 2016-2017

TSE

Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Session 2 – Semestre 2

Licence 1 mention ÉCONOMIE parcours économie et mathématiques et informatique appliquées

ÉPREUVE : ALGÈBRE LINÉAIRE

ENSEIGNANT : A. BLANCHET

Vendredi 23 juin 2017 – Durée de l'épreuve : 1h30 – 2 pages

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies.
- Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'application linéaire associée à M.
2. Déterminer une famille génératrice de l'image de M.
3. Déterminer une base de l'image de M.
4. Déterminer une famille libre de l'image de M.
5. Quel est le rang de M ?
6. Quelle est la dimension du noyau de M ?
7. Déterminer un système d'équations du noyau de M.

Exercice 2

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y-z, x-y+z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la représentation matricielle A de f dans les bases canoniques.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
4. Déterminer la dimension du noyau de f.
5. Considérons le système linéaire dont la représentation matricielle est $AX = B$.
   (a) Discuter suivant la valeur des paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ le nombre de solutions du système lorsque

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

(b) Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions lorsque

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f - \lambda\, id$ n'est pas inversible.
2. En déduire le rang de f.
3. Déterminer les noyaux des endomorphismes $f - \lambda\, id$ pour les λ obtenus.
4. Donner l'équation cartésienne d'un supplémentaire de $\ker(f)$.

Exercice 4

Soit $\zeta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1\,\zeta + a_2\,\zeta$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Montrer que f est surjective.
   (c) Déduire la dimension de $\ker(f)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(b_0, b_1) = (-b_0\,\zeta, b_0 - b_1\,\zeta, b_1)$.
   (a) Montrer que g est une application linéaire. Ecrire la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que g est injective.
   (c) Déduire le rang de g.

Exercice 5

Énoncer et démontrer le théorème du rang.