TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2016-2017
Session 1 – Semestre 2

Licence 1 mention ÉCONOMIE parcours économie et mathématiques et informatique appliquées

ÉPREUVE : ALGÈBRE LINÉAIRE

ENSEIGNANT : A. BLANCHET

Mardi 9 mai 2017 – Durée de l'épreuve : 1h30 – 2 pages

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies.
- Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère trois suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par leur premier terme : x_0, y_0 et z_0, et la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 2y_n + 4z_n \\ z_{n+1} &= 2x_n - 2y_n + 3z_n \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $V_{n+1} = AV_n$ où $V_n = [x_n, y_n, z_n]^t$.
2. Écrire l'application linéaire f dont la matrice dans les bases canoniques est A.
3. Montrer, en justifiant précisément, que $V_n = A^n V_0$, pour tout $n \geq 1$.
4. On considère la famille
$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
Montrer que $\mathcal{E}$ défini une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer M, la représentation matricielle de f dans la base $\mathcal{E}$.
6. Calculer M^n, pour tout $n \geq 1$.
7. En déduire A^n, pour tout $n \geq 1$.
8. Exprimer $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 2

Soient
$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 2z = 0\}$$
et
$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que F est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de la projection sur F de direction E.

Exercice 3

On considère l'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, x+y, x+2y+z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, dans les bases canoniques, la représentation matricielle de f.
3. Discuter suivant les valeurs des paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le nombre de solutions de $f(x,y,z) = (1,a,b)$.
4. Déterminer les solutions de $f(x,y,z) = (1,0,1)$.

Exercice 4

Énoncer et démontrer le théorème du rang.