Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d'Économie de Toulouse

Année universitaire 2016-2017

Session 2

Semestre 1

Licence 1 mention Economie parcours économie-mathématiques et informatique appliquées

EPREUVE : LES FONDAMENTAUX EN MATHEMATIQUES

Enseignant : B. ALZIARY

Date de l'épreuve : 16/06/2017

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : aucun

Nombre de pages : 3

Exercice 1.

1. Donner la définition de $\mathcal{R}$ relation d'ordre sur un ensemble E (préciser les définitions des propriétés de $\mathcal{R}$ utilisées).
2. Donner un exemple d'ordre non total.
3. La relation suivante est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq x'+1 \\ y^2 \leq y'^2 \end{cases}$$

Exercice 2.
Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.
Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à D. Soient f, g, h trois fonctions réelles définies sur D telles que

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h admettent une même limite l en a, alors g a aussi pour limite l.

Exercice 3.
Les sous ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1. $$A_1 = \{ \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^x + 3y = 0 \quad \}$$
2. $$A_2 = \{ \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = -y + \pi z \quad \}$$
3. $$A_3 = \{ \quad f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} \quad \}$$

Exercice 4.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leq v_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et en déduire leur convergence.
3. Trouver les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (étudier $v_n - u_n$).

Exercice 5.
Soit n un entier. Soit l'application f_n de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f_n(x) = \ln\left(x^3 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{n+1}\right).$$

1. Montrer que, pour tout n, f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$, tel que $f_n(x_n)= 0$.
   On peut donc construire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des points de $]0,1[$, tels que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout x dans $[0,+\infty[$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers une certaine valeur $l \in [0,1]$ que l'on déterminera.

   Indication : on pourra remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + \frac{7}{4}x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right)$.