Licence 3 mention Économie et Mathématiques
Licence 3 mention Économie et Mathématiques – Parcours Magistère 1ère année
Epreuve : Probabilités – Code : L3-S6-6

Exercice 1. Soit X une variable réelle intégrable. Montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\phi_X'(0)}{i},$$

où ϕ_X' désigne la dérivée de la fonction caractéristique ϕ_X de la variable X.

Exercice 2. Soit (X, Y) est un vecteur gaussien tel que $\mathrm{Var}(Y) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $Z = X - cY$ soit indépendante de Y et la calculer.
2. Calculer $\mathbb{E}[X^2 \,|\, Y]$

(on donnera des expressions en fonction des espérances, variances et covariance des variables X, Y).

Exercice 3. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité f_Z définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; f_Z(x, y) = x(y - x)e^{-y}\mathbb{1}_D(x, y),$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq y\}$. Calculer la densité du couple (X, XY).

Exercice 4.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers 0 et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables réelles qui converge en loi vers une variable Y.
On rappelle qu'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\omega_g(t) \xrightarrow[t \to 0+]{} 0,$$

où $\omega_g(t) = \sup_{x,y\in\mathbb{R} : |x-y|\leq t} |g(x) - g(y)|$ désigne le module de continuité de g.

1. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue, alors pour tout $n \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$,
$$|\mathbb{E}[g(X_n + Y_n) - g(Y_n)]| \leq \omega(\varepsilon) + 2\|g\|_\infty \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon).$$
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(X_n + Y_n)] = \mathbb{E}[g(Y)]$.