Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 6

Licence 3 mention Economie et Mathématiques
Licence 3 mention Economie et Mathématiques parcours Magistère 1ère année

EPREUVE : PROBABILITES

Date de l'épreuve : 3/05/2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : aucun

Nombre de pages : 2

Exercice 1. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité f_Z définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_Z(x, y) = x(y - x)e^{-y}\mathbb{1}_D(x, y),$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq y\}$.

1. Calculer les densités marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
3. Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y, notée $f_{X|Y}(x|y)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 2. Soit X_1, X_2, X_3 des variables gaussiennes indépendantes telles que

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = 0, \quad \mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{E}[X_2^2] = \mathbb{E}[X_3^2] = 1.$$

On définit les variables

$$U = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - 3,\ V = X_1 - X_3 + 2.$$

1. Montrer que le vecteur aléatoire (U, V) est un vecteur gaussien et calculer sa moyenne et sa matrice de covariance.
2. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $W = U - cV$ soit indépendante de V et la calculer.
3. A l'aide de la question précédente, calculer $\mathbb{E}[(U + 2V)^2|V]$. (on justifiera soigneusement les différentes étapes de calcul)

Exercice 3.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers la variable constante $c \in \mathbb{R}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables réelles qui converge en loi vers une variable Y.

1. Montrer que la suite $(c + Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $c + Y$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$|e^{it(X_n+Y_n)} - e^{it(c+Y_n)}| \leq 2t|X_n - c|.$$

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)}] - \mathbb{E}[e^{it(c+Y_n)}]| = 0$.
Indication : Commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$|\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)}] - \mathbb{E}[e^{it(c+Y_n)}]| \leq 2\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) + 2t\varepsilon.$$

4. Montrer à l'aide des résultats précédents que la suite $(X_n + Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers $c+Y$.

Exercice 4.

1. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $F(t) = e^{-e^{-t}}$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ (appelée loi de Gumbel).
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 a pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$ (loi exponentielle de paramètre λ) pour un certain $\lambda > 0$.
   (a) Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on définit l'évènement $A_n(t) = \{\max_{k=1,\dots,n} X_k \leq t\}$. Montrer que $\mathbb{P}(A_n(t)) = (F_{X_1}(t))^n$.
   (b) Pour tout $n \geq 1$,on définit $Y_n = \max_{k=1,\dots,n} X_k - \frac{\ln(n)}{\lambda}$. Calculer la fonction de répartition de Y_n et en déduire que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable Z dont on précisera la loi.