

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 6

Licence 3 mention Economie

Licence 3 mention Economie et Mathématiques

Licence 3 mention Economie et Mathématiques parcours Magistère 1^{ère} année

EPREUVE : ECONOMETRIE

Date de l'épreuve : Mardi 03 Mai 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice

Nombre de pages : 3

Exercices (8 points)

Exercice 1

Considérez le modèle de régression linéaire simple suivant :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Le théorème de Gauss-Markov stipule que, sous certaines hypothèses, dans la classe des estimateurs linéaires sans biais de β_1 , celui des MCO, $\hat{\beta}_1$, est le plus efficace. En quoi $\hat{\beta}_1$ est-il linéaire ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

Considérez les deux modèles de régression multiple sous forme matricielle suivants :

$$y = X\beta + u$$

$$y = Z\delta + v$$

où la matrice X est de rang plein (égal au nombre de ses colonnes) et $Z = XA$ où A est une matrice carrée non singulière. Comparez les estimateurs des MCO des vecteurs des paramètres de ces deux modèles et les vecteurs des résidus.

Exercice 3

Considérez le modèle de régression multiple sous forme matricielle :

$$y = X\beta + u$$

3.1 Montrez que si l'espérance conditionnelle (à X) du terme d'erreur est nulle, on a les deux conditions de moment suivantes :

$$E(u) = 0$$

$$E(X'u) = 0$$

3.2 Dédurre de ces conditions de moment que la covariance entre X et u est nulle.

3.3 Montrez que l'estimateur de β par la méthode des moments qui satisfait ces deux conditions de moment coïncide avec celui des MCO.

Exercice 4

Vous hésitez entre les deux spécifications économétriques suivantes :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

et

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u$$

4.1 Décrivez une procédure pour choisir entre ces deux modèles s'appuyant sur un test de Student.

À présent, vous hésitez entre les deux modèles suivants :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

et

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log(x_1) + \beta_2 \log(x_2) + u$$

4.2 Spécifiez un modèle dont ces deux modèles sont des cas particuliers.

4.3 Explicitiez alors une méthode simple qui permettrait de choisir entre ces deux modèles.

Problème (12 points): Certaines théories de l'investissement en capital humain indiquent que le logarithme du taux de salaire ($ltsal$) s'écrit en fonction du niveau d'éducation $educ$ (compté en années), l'âge (agd), un terme géométrique en l'âge ($eag = d^{-agd}$ où $d = 0.95$) et le sexe ($s \in \{Homme = 1, Femme = 0\}$) :

$$ltsal = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 agd + \beta_3 d^{-agd} + \beta_4 s + u, \quad \text{Modèle } M1$$

où $E(u \mid educ, agd, s) = 0$.

On considère un échantillon de 1126 personnes, extrait de l'Enquête Emploi effectuée en France en 1999. En utilisant les données de l'échantillon, on obtient:

Source	SS	df	MS	Number of obs =	1126
Model	30.2601323	4	7.56503307	F(4, 1121) =	100.01
Residual	84.7940378	1121	.075641425	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.2630
				Adj R-squared =	0.2604
Total	115.05417	1125	.102270373	Root MSE =	.27503

$ltsal$	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
$educ$	.0583929	.003221	18.13	0.000	.052073 .0647128
agd	.0148249	.0047616	3.11	0.002	.0054822 .0241676
eag	-.0153507	.0109452	-1.40	0.161	-.036826 .0061246
s	.1648505	.016521	9.98	0.000	.132435 .197266
$_{cons}$	.7586258	.1241574	6.11	0.000	.5150188 1.002233

(*Rappel*: les quantiles d'ordre 0.95, 0.975 et 0.995 d'une loi normale centrée et réduite sont égaux à 1.63, 1.96 et 2.58).

1. Expliciter pourquoi le modèle $M1$ est linéaire.
2. Sous quelles conditions cet estimateur est BLUE? On admettra ces conditions dans la suite du problème.
3. Quel est le résultat du test à un niveau de 5% de $H_0 : \beta_4 = 0.135$ contre $H_a : \beta_4 > 0.135$.
4. Quelle est la différence en moyenne du logarithme du taux de salaire entre une femme d'éducation ($educ = 20$) et un homme d'éducation ($educ = 17$) qui ont le même âge.
5. Que vous manque-t-il dans les résultats ci-dessus pour calculer la variance de cette différence?

On considère les résidus de la régression précédente, uc .

6. Quel est la valeur du R^2 de la régression de uc sur les variables $educ, agd, eag$ et s (en incluant une constante)?

7. On regresse uc sur les variables $seduc = s * educ, sagd = s * agd$ et $seag = s * eag$ les interactions de la variable s avec les autres variables (sans la constante ni $educ, agd, eag$ et s). Pour cette régression, on obtient une statistique de Fisher, égale à 0.42 dans cet échantillon, associée au test de la restriction linéaire multiple H_0 : Les coefficients de ces interactions sont nuls contre H_a : L'un de ces coefficients est différent de zéro. Quelle est la loi de F sous l'hypothèse nulle?

8. La p-valeur associée à ce test est égale à 79%. Que concluez vous sur la validité de H_0 en considérant un niveau de test de 5%?

On distingue les deux sous-échantillons composés par les hommes ($s = 1$) et les femmes et on effectue la régression correspondante à $M1$ dans chacun de ces échantillons. On obtient une somme

des carrés des résidus égale à 45.44 pour l'échantillon des hommes et égale à 39.09 pour l'échantillon des femmes.

9. Considérons l'hypothèse nulle: H_0 : Les coefficients des variables *educ*, *agd* et *eag* sont égaux pour hommes et femmes contre H_a : L'un de ces coefficients est différent entre hommes et femmes. En utilisant les sommes des carrés des résidus et les résultats du modèle M1, construire la statistique de Fisher associée à ce couple d'hypothèses.

10. En dériver sa valeur.

11. Quelle est la loi de cette statistique sous la nulle? On donnera les degrés de liberté correspondants.

12. Le quantile à 95% de cette loi est égale à 2.61. Quel est le résultat du test si le niveau est égal à 5%?

13. Qu'en concluez vous sur les différences de salaire entre hommes et femmes?