Licence 3 mention Économie et Mathématiques
Licence 3 mention Économie et Mathématiques – Parcours Magistère 1ère année
Epreuve : Analyse et Optimisation – Code : L3-S6-5

Liste des documents autorisés : Aucun
Liste des matériels autorisés : Aucun matériel électronique
Nombre de pages : 1

***

On pourra admettre une question pour résoudre les suivantes.

Exercice 1. Énoncer et démontrer le théorème du point fixe de Banach-Picard.

Exercice 2. E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\},\ f \in E.$$

On considère les applications $\Phi : E \to \mathbb{R}$ et $\Psi : E \to E$ définies par les relations

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(s)\,ds \quad \text{et} \quad \Psi(f)(t) = f^3(t),\ \forall t \in [0,1], \text{ pour } f \text{ dans } E.$$

1. a) Démontrer que $\Psi(f) \in E$ pour tout f de E.
   b) Justifier la différentiabilité de Φ et Ψ et expliciter leurs différentielles.
2. a) Exprimer $\mathcal{I}(f) = (\Phi \circ \Psi)(f)$ en fonction d'un élément arbitraire f de E.
   b) Pourquoi $\mathcal{I}$ est-elle différentiable ? Donner sa différentielle via la règle de différentiation des composées.
3. Retrouver le résultat précédent en différentiant *directement* $\mathcal{I}$.

4