

Licence 3 mention Economie et Mathématiques

Licence 3 mention Economie et Mathématiques parcours Magistère 1ère année

EPREUVE : ANALYSE ET OPTIMISATION

Date de l'épreuve : mai 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Aucun matériel électronique

Nombre de pages : 1

On pourra admettre une question pour résoudre les suivantes. Le barème est indicatif.

On se donne $n \geq 1$; l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$.

Exercice 1 (7 pts). L'espace $E = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues ; il est muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}$. On considère l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à une fonction f de E fait correspondre le réel $\Phi(f) := (f(0))^3$.

Établir, avec soin, la différentiabilité de Φ et, pour f et h dans E , expliciter $\Phi'(f)(h)$.

Exercice 2 (13 pts). Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère le problème sans contrainte

$$(P_x) \quad \inf \{ \langle Ay, y \rangle + \|y - x\|^2 : y \in \mathbb{R}^n \},$$

où A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$ ayant la propriété suivante : il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2$ pour tout u dans $\mathbb{R}^n$.

1. (1pt) Vérifier que

$$\langle (I + A)(u), u \rangle \geq (1 + \alpha) \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

2. (2pt) Montrer que (P_x) possède *au plus* une solution que l'on désignera par $p(x)$ si elle existe.

3. (2pt) Montrer que y est solution de (P_x) si et seulement si y est solution l'équation

$$(*) \quad y + Ay = x.$$

4. (1pt) En montrant que $I + A$ est inversible établir que le problème (P_x) possède effectivement une solution $p(x)$ dont on donnera une formule en fonction de I, A et x .

5. (2pt) Pour u fixé dans $\mathbb{R}^n$, on pose $v = (I + A)(u)$. En utilisant (1), montrer que $\|u\| \leq \frac{1}{1+\alpha} \|v\|$.

6. (1.5 pt) En déduire que $(I + A)^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application $\frac{1}{1+\alpha}$ lipschitzienne.

7. (3.5pt) Pour x_0 fixé, étudier en détail la convergence de la suite $x_{k+1} = p(x_k)$.