Licence 3 mention Économie et Mathématiques
**Epreuve : Intégration – Code : L3-S5-8**

1. Donner les définitions d'une tribu et d'une mesure.

2. Enoncer et démontrer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

3. Enoncer le théorème de Fubini.

4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de $\Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

   (a) On suppose que $\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{|f_n| > \epsilon\} = 0$.

      i. Montrer que
      $$\int_{\{|f_n|>\epsilon\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \leq \mu(\{|f_n| > \epsilon\})$$
      et
      $$\int_{\{|f_n|\leq\epsilon\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \leq \epsilon\mu(\Omega).$$

      ii. En déduire
      $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu = 0.$$

   (b) On suppose que
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu = 0.$$

      i. Montrer que
      $$\int_\Omega \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \geq \int_{\{|f_n|>\epsilon\}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} d\mu \quad \forall\epsilon > 0.$$

      ii. En déduire que
      $$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{|f_n| > \epsilon\} = 0.$$

5. Calculer $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n \cos x \, dx$.

6. Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où $\mu$ est une mesure finie. Soit $f$ une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\int_\Omega f^2 d\mu < \infty$. Montrer que $\int_\Omega f d\mu < \infty$.