Licence 3 mention Économie et Mathématiques
Epreuve : Equations Différentielles – Code : L3-S5-6

Les documents et appareils électroniques sont interdits
Un soin particulier sera porté à la rédaction et la présentation
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

Exercice 1 (Cours).

1) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Rappeler la définition de f localement Lischitzienne par rapport à sa $2^{\text{ème}}$ variable.

2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Montrer que si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ alors f est localement Lischitzienne par rapport à toutes ses variables.

3) Citer un Théorème de Cauchy-Lipschitz ou son corollaire vus en cours.

Exercice 2. *On justifiera avec soin chaque réponse en citant, notamment, les théorèmes utilisés.*
Soient $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ localement Lipschitzienne par rapport à sa $2^{\text{ème}}$ variable et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est à croissance sous-linéaire, c'est-à-dire,

$$\exists C > 0 \text{ tq } \forall (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ \|f(t, z)\| \leqslant C + C\|z\|.$$

On considère le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1) Montrer que le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution globale $(\mathbb{R}, x)$.

2) Montrer que : $\forall a \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1 + a^2) \leqslant a$. En déduire que,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \ln(1 + a^2) \leqslant |a|.$$

3) Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos t + \ln(1 + x^2), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution globale $(\mathbb{R}, x)$. Montrer que $x \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

4