Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d'économie de Toulouse

Année universitaire 2015-2016

Session 1

Semestre 5

Licence 3 mention Économie & Mathématiques

Epreuve : Équations Différentielles

Date de l'épreuve : Mercredi 06 Janvier 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Rien

Liste des matériels autorisés : Rien

Nombre de pages (y compris page de garde) : 3

Université Toulouse I – Capitole **LEM 3, Semestre 5**
Équations différentielles **2015-2016**

Examen – Durée : 1h30

Les documents et appareils électroniques sont interdits
Un soin particulier sera porté à la rédaction et la présentation

Exercice 1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle suivante.

$$\begin{cases} x' + 2tx = 2t, \ t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$tx' - x = \frac{t^2}{\sqrt{1+t}}, \ \text{sur} \ \ ]0, +\infty[.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante.

$$x'' - 3x' + 2x = te^t.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle ordinaire suivante.

$$(E) \qquad x'' + 2x' + x = 2e^{-t} + (14\cos t + 2\sin t)e^{2t}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer les solutions x_0 de

$$x'' + 2x' + x = 0, \ t \in \mathbb{R},$$

2) Déterminer une solution particulière φ_1 de

$$\varphi_1'' + 2\varphi_1' + \varphi_1 = 2e^{-t}, \ t \in \mathbb{R}.$$

3) Déterminer une solution particulière φ_2 de

$$\varphi_2'' + 2\varphi_2' + \varphi_2 = (14\cos t + 2\sin t)e^{2t},\ t \in \mathbb{R},$$

où φ_2 est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_2(t) = (a\cos t + b\sin t)e^{2t},$$

avec a et b des constantes à déterminer.

4) À l'aide du principe de superposition et des questions précédentes, en déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5) Déterminer l'unique solution y de l'équation (E) telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 5. Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^\star$ et soit (E_η) l'équation différentielle :

$$(E_\eta) \qquad\qquad (1-t^2)x'' - tx' + \eta^2 x = 0, \quad \text{sur }]-1,1[.$$

1) En posant pour $s \in]0,\pi[$, $t = \cos s$ et $y(s) = x_\eta(\cos s)$, déterminer les solutions $(]-1,1[, x_\eta)$ de (E_η).

2) Pour $\eta = 1$, simplifier l'expression de $(]-1,1[, x_1)$ solution de (E_1).

Rappel : $\forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arccos t = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.