Licence 3 mention Économie et Mathématiques
Epreuve : Analyse Approfondie – Code : L3-S5-7

Exercice 1. [6 Points] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. On définit alors

$$\forall f \in E \qquad N(f) = \int_0^1 x|f(x)|dx \qquad \tilde{N}(f) = \sqrt{\int_0^1 x|f(x)|^2 dx}.$$

1. Démontrer que N et $\tilde{N}$ sont des normes sur E.
2. Montrer que
$$\forall f \in E \qquad N(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{N}(f)$$
3. Démontrer que N et $\tilde{N}$ ne sont pas équivalentes. On considérera pour cela la suite de fonctions
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) = \left[n - n^2 x\right] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 1/n}.$$

Exercice 2. [14 Points]

Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. On définit l'application

$$(P,Q) \in E^2 \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 x^2 P(x) Q(x) dx.$$

1. Rappeler la définition d'un espace vectoriel normé complet.
2. Rappeler la définition d'un espace de Hilbert.
3. Démontrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.
4. Démontrer que $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace de Hilbert.
5. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que sa démonstration.
6. En utilisant une factorisation par $x^{1+\alpha}$ et la question précédente, démontrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, on a
$$\int_0^1 x^{2+\alpha} + x^{2+\alpha+\beta} dx \leq \sqrt{\int_0^1 x^{2+2\alpha} dx \int_0^1 x^2 + 2x^{2+\beta} + x^{2+2\beta} dx}$$
7. On définit F comme l'ensemble des polynômes de réels de degré au plus 1.
   (a) Quelle est la structure de F, sa dimension?
   (b) Construire une base orthonormée de F qu'on notera (Q_1, Q_2).
   (c) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intégrale
   $$\int_0^1 x^2(x^2 + x + 1 - ax - b)^2 dx$$
   soit minimale. Pour résoudre cette question, on pourra s'aider de la projection orthogonale sur F du polynôme $X^2 + X + 1$ en utilisant la base (Q_1, Q_2) précédente. Donner la valeur de ce minimum.

5