Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Université Toulouse 1 Capitole
Ecole d’économie de Toulouse

Année universitaire 2015-2016

Session 1

Semestre 5

Licence 3 mention Économie & Mathématiques

Epreuve : Analyse Approfondie

Date de l’épreuve : Vendredi 08 Janvier 2016

Durée de l’épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Néant

Liste des matériels autorisés : Néant

Nombre de pages (y compris page de garde) : 3

L3 Économie et Mathématiques UNIVERSITÉ TOULOUSE I CAPITOLE

Analyse approfondie – Examen terminal
Semestre 5 - 2015-2016

Exercice [5 points]

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|\infty$.

1. On définit l'application ϕ de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ par
$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)x(1-x)dx.$$
Montrer que ϕ est linéaire continue sur E et calculer sa norme.
2. On définit l'application ψ de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$ par
$$\psi(f)(x) = \cos(3f(x)).$$
Montrer que ψ est continue sur E.
3. On pose $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |xf(x)|$. Vérifier que N est une norme sur E.
4. Montrer que $N(f) \leq \|f\|_\infty$ et que la constante est optimale.
5. Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
(on pourra étudier les fonctions $f_n(x) = n\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1/n} + \frac{1}{x}\mathbf{1}_{1/n<x<1}$)

Problème - Polynômes de Laguerre. [15 points]

1. Soit E un espace de Hilbert de produit scalaire noté $\langle , \rangle$ et de norme $\|.\|$. On considère $(e_i)_{i=1\ldots n}$ une famille orthonormée de E.
   (a) Rappeler le lien entre $\langle , \rangle$ et $\|.\|$.
   (b) Démontrer que nécessairement, $(e_i)_{i=1\ldots n}$ est une famille libre de vecteurs.
   (c) Soit $x \in E$, en utilisant des projections orthogonales, déterminer le minimum de la fonction f
$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|^2$$
2. On considère l'espace
$$H := \left\{ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \, : \, \int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-x}dx < +\infty \right\}$$
   (a) Démontrer que H est muni d'un produit scalaire si on considère
$$\forall (f,g) \in H^2 \qquad \langle f, g\rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx.$$
   On précisera en particulier pourquoi l'intégrale précédente est définie dès que f et g sont dans H. Dans la suite, on notera $\|.\|$ la norme dérivée de ce produit scalaire.
   (b) Démontrer que H est un espace complet (on utilisera à bon escient le théorème de Riesz sur les espaces L^p).

(c) Calculer les dérivées

$$\frac{d\{xe^{-x}\}}{dx}, \frac{d\{x^2e^{-x}\}}{dx}, \frac{d^2\{x^2e^{-x}\}}{dx^2}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, expliquer pourquoi il existe un unique polynôme P_n tel que

$$\frac{d^{n-1}\{x^n e^{-x}\}}{dx^n} = e^{-x} P_n(x),$$

et que $P_n(0) = 0$ (ne pas chercher à obtenir une expression explicite de P_n).

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_n à coefficients réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{d^n\{x^n e^{-x}\}}{dx^n} = n! L_n(x) e^{-x}.$$

Pour ce faire, on ne cherchera pas à obtenir une expression explicite de L_n.

(f) Donner les valeurs des polynômes L_0, L_1 et L_2.

(g) Quel est le degré et le coefficient dominant de L_n? Calculer

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad \frac{d^n\{L_n(x)\}}{dx^n}.$$

(h) En remarquant que L_n est une famille de polynômes à degrés étagés, démontrer que L_n est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(i) En utilisant une intégration par parties, démontrer que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

En déduire la valeur pour tout entier n de

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

(j) On suppose que $n \leq m$ avec $m \geq 1$, démontrer que

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{1}{m!} \int_0^{+\infty} L_n(x) \frac{d^m\{x^m e^{-x}\}}{dx^m} dx$$

En déduire par n intégrations par parties successives que si $n \leq m$, alors

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{(-1)^n}{m!} \int_0^{+\infty} \frac{d^n\{L_n(x)\}}{dx^n} \times \frac{d^{m-n}\{x^m e^{-x}\}}{dx^{m-n}} dx$$

On s'appuiera en particulier sur la question (d) pour calculer les termes "crochets" des intégrations par parties.

(k) En déduire en utilisant (g) que si $n \neq m$, alors

$$\langle L_n, L_m \rangle = 0.$$

(l) Déduire également de (j) et de (i) que

$$\langle L_n, L_n \rangle = 1.$$

Que forme donc la famille $(L_n)_{n \geq 0}$?

3. On considère $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on définit

$$J(a, b, c) := \int_0^{+\infty} (x^3 - (ax^2 + bx + c))^2 e^{-x}.$$

(a) Interpréter J en terme de norme $\|.\|$.

(b) A quoi correspond géométriquement la recherche de (a, b, c) minimisant J?

(c) En utilisant L_0, L_1 et L_2, trouver les coefficients (a^*, b^*, c^*) définis par

$$J(a^*, b^*, c^*) = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} J(a, b, c).$$