Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 6

Licence 3 mention Economie
Licence 3 Informatique

EPREUVE : THEORIE STATISTIQUE DE LA DECISION

Date de l'épreuve : Lundi 02 Mai 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice FX-92

Nombre de pages : 4

TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

TSE Licence 3 mention Économie
L3 Économie et Informatique

Année universitaire 2015–2016
Session 1 – Semestre 6

Epreuve : Théorie statistique de la décision

Date de l'épreuve : lundi 2 mai 2016
Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun.
Liste des matériels autorisés : calculatrice.
Nombre de pages : 3.
Pour tous les tests statistiques demandés, on prendra un risque α de 5 %.
Les résultats des calculs seront donnés avec 2 décimales après la virgule.
Barême indicatif sur 20 : 4 - 4 - 12

Exercice A
Soit X une variable de loi binomiale négative $\mathcal{BN}(N,p)$ où p est un paramètre réel inconnu dans l'intervalle $]0,1[$.
Rappel : la loi binomiale négative est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre d'échecs nécessaires avant l'obtention de N succès, sachant que la probabilité d'un succès à chaque essai est p. On rappelle que si $X \sim \mathcal{BN}(N,p)$, alors $P(X=x) = C_{N+x-1}^{x}\, p^N (1-p)^x$ et que l'espérance de X vaut $N\frac{1-p}{p}$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_{MV}$ de p sur la base d'un n-échantillon $X_1,\ldots,X_n$ de variables i.i.d. comme X (on ne demande pas de vérifier la condition du 2ème ordre).
2. Déterminer l'estimateur $\hat{p}_{MM}$ de p par la méthode des moments sur la base d'un n-échantillon $X_1,\ldots,X_n$ de variables i.i.d. comme X.
3. Application : on a obtenu un échantillon de taille 9 de la loi binomiale négative qui consiste à compter le nombre d'échecs avant d'obtenir 2 succès : 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 2.
   Donner les estimations de la proportion p de succès pour chaque essai correspondant aux estimateurs de la méthode du maximum de vraisemblance et de la méthode des moments.

Exercice B Le service de la bibliothèque universitaire étudie la variation des emprunts des étudiants en fonction des jours de la semaine. Il a recensé les ouvrages empruntés par jour durant une semaine universitaire.

Jours	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Emprunts	86	79	98	83	114

Au vu de ces résultats, le responsable du service pense qu'il vaudrait mieux renforcer la présence des bibliothécaires le mercredi et le vendredi qui sont les jours où les étudiants empruntent davantage. Les bibliothécaires pensent au contraire que les étudiants empruntent de manière équivalente tous les jours de la semaine. En vous basant sur les résultats d'un test statistique (dont vous préciserez le nom, l'hypothèse testée et dont vous vérifierez les conditions de validité), aider le responsable du service à prendre une décision. On donne les quantiles suivants des lois de χ^2 : $\chi^2_{1,0.05} = 3,84$, $\chi^2_{2,0.05} = 5,99$, $\chi^2_{3,0.05} = 7,82$, $\chi^2_{4,0.05} = 9,49$, $\chi^2_{5,0.05} = 11,07$.

Exercice C

Les données (Jobson, 1991) sont issues d'une étude maketing visant à étudier l'impact de différentes campagnes publicitaires sur les ventes de différents aliments. Un échantillon ou "panel" de familles a été constitué en tenant compte du lieu d'habitation ainsi que de la taille de la famille (nombre de membres dans la famille, de 1 à 6). Chaque semaine, chacune de ces familles a rempli un questionnaire décrivant les achats réalisés. Nous nous limitons ici à l'étude de l'impact sur la consommation de lait de quatre campagnes publicitaires diffusées sur des chaînes locales de télévision. Quatre villes, une par campagne publicitaire, ont été choisies et, dans chaque ville, 6 familles qui représentent les 6 tailles familiales possibles constituent le panel. Les consommations en lait de ces 24 familles ont été relevées (en dollars) après deux mois de campagne.

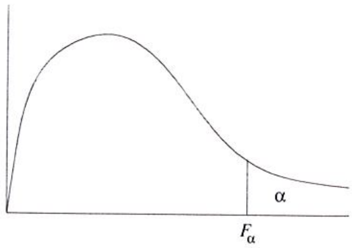
On note Y la consommation en lait de la famille, Z la taille de la famille et i l'indice de la campagne publicitaire. Voici les consommations en lait relevées (la dernière ligne contient les sommes des colonnes) :

Campagne 1		Campagne 2		Campagne 3		Campagne 4	
Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z
13,11	1	8,00	1	10,90	1	14,36	1
16,89	2	18,27	2	28,22	2	26,37	2
27,99	3	27,72	3	38,62	3	34,15	3
36,35	4	42,04	4	48,31	4	54,02	4
48,85	5	48,50	5	60,23	5	59,90	5
61,97	6	59,92	6	71,39	6	74,79	6
205,16	21	204,45	21	257,67	21	263,59	21

On donne $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} y_{ij} = 930,87$ et $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} y_{ij}^2 = 45296,97$.

1. On considère le modèle d'analyse de variance à un facteur expliquant la consommation de lait par la campagne publicitaire.
   (a) Donner l'écriture de ce modèle (première paramétrisation) en précisant les hypothèses.
   (b) Sachant que la somme des carrés résiduelle de ce modèle vaut 8669,6, établir le tableau d'analyse de la variance de ce modèle.
   (c) Donner les estimations des paramètres de ce modèle (y compris celle de σ^2, la variance des erreurs).
   (d) Comparer par un test statistique l'impact des quatre campagnes publicitaires sur la consommation de lait.
2. On veut maintenant tenir compte de la taille de la famille pour améliorer la comparaison des impacts des campagnes publicitaires.
   On considère les trois modèles suivants, dont on donne les sommes de carrés résiduelles :
   M_{II} : $y_{ij} = \mu + \beta z_{ij} + \varepsilon_{ij}$, SCR=678,7
   M_{IV} : $y_{ij} = \mu_i + \beta z_{ij} + \varepsilon_{ij}$, SCR=156,4
   M_V : $y_{ij} = \mu_i + \beta_i z_{ij} + \varepsilon_{ij}$, SCR=103,6
   (a) Donner le nom de ces trois modèles et leur nombre de paramètres.
   (b) Vérifier par un test statistique que la taille de la famille impacte significativement sa consommation de lait.
   (c) Y a-t-il un risque de confusion entre l'effet de la taille de la famille sur la consommation de lait et l'effet de la campagne publicitaire ? (Indications : la réponse à cette question ne nécessite pas de test et s'appuie sur une remarque très simple).
   (d) Peut-on considérer que l'effet des campagnes sur la consommation de lait est le même quelle que soit la taille de la famille ? Répondre à l'aide d'un test statistique.
   (e) En tenant compte de la taille de la famille, comparer par un test statistique les impacts des quatre campagnes publicitaires sur la consommation de lait.

Loi de Fisher : $\alpha = 0,05$



Degrés de liberté du dénominateur : ν_2	Degrés de liberté du numérateur : ν_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
31	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
33	4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.30	2.23	2.18
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
37	4.11	3.25	2.86	2.63	2.47	2.36	2.27	2.20	2.14
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
39	4.09	3.24	2.85	2.61	2.46	2.34	2.26	2.19	2.13
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88