Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 6

Licence 3 mention Economie

EPREUVE : OPTIMISATION

Date de l'épreuve : Mardi 10 Mai 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice FX-92

Nombre de pages : 2

UNIVERSITE
TOULOUSE I
CAPITOLE

TSE
Année Universitaire 2015-2016

SEMESTRE 6 - Session 1
LICENCE 3 - Mention ECONOMIE

OPTIMISATION

Seule la calculatrice FX-92 est autorisée.

1. Soit $f(x,y,z) = (x+y)^2 + y^2 + (y+z)^2$. Résoudre le problème suivant :
   $\mathcal{P}_1$: Minimiser $f(x,y,z)$ sur $K_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 1-x \leq 0 \text{ et } x+y+z \leq 3\right\}$

2. (a) Soit $f(x,y) = x^{-2}y^{-3} - 5x + y^2$. Montrer que f est strictement convexe sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

   (b) Soit $f(x,y) = \ln(x+2y+1) - e^{x^2+xy+y^2}$. Montrer que f est concave sur $(\mathbb{R}^{+})^2$.

   (c) Soit $f(x,y) = \sqrt{1 - \ln x - \ln y}$. Montrer que f est quasiconvexe sur $]0,1[^2$

3. Soient $g(x,y,z) = 2x(x-z) + 2y(y-z) + 3z^2$ et $h(x,y,z) = (e^x - y)(y - e^z)$.
   Chacun des problèmes suivants a-t-il au moins une solution ?
   (a) $\mathcal{P}_2$: Minimiser $g(x,y,z)$ sur $K_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ h(x,y,z) \leq -4\right\}$
   (b) $\mathcal{P}_3$: Minimiser $h(x,y,z)$ sur $K_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ g(x,y,z) \leq 1\right\}$

4. Soit $p \in \mathbb{R}$. On définit $f(x,y) = 2x^2 - xy + (y-p)^2$ et $K_p = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x+y \leq 2p-4\right\}$.
   (a) Minimiser f sur K_p.
   On précisera bien pour quelles valeurs de p les résultats obtenus sont valables.
   (b) Calculer $V(p) = \text{Inf}\,\{f(x,y) ; (x,y) \in K_p\}$.
   (c) La fonction V est-elle convexe ?

Barème envisagé : *1)4* *2)2+3+2* *3)2+2* *4)3+1+1*