

**Année universitaire 2015-2016**

**Session 1 - Semestre 6**

**Licence 3 mention Economie**

**Licence 3 mention Economie et Mathématiques**

**Licence 3 mention Economie et Mathématiques parcours Magistère 1<sup>ère</sup> année**

**EPREUVE : ECONOMETRIE**

Date de l'épreuve : Mardi 03 Mai 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Aucun

Liste des matériels autorisés : Calculatrice

Nombre de pages : 3

## Exercices (8 points)

### Exercice 1

Considérez le modèle de régression linéaire simple suivant :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Le théorème de Gauss-Markov stipule que, sous certaines hypothèses, dans la classe des estimateurs linéaires sans biais de  $\beta_1$ , celui des MCO,  $\hat{\beta}_1$ , est le plus efficace. En quoi  $\hat{\beta}_1$  est-il linéaire ? Justifiez votre réponse.

### Exercice 2

Considérez les deux modèles de régression multiple sous forme matricielle suivants :

$$y = X\beta + u$$

$$y = Z\delta + v$$

où la matrice X est de rang plein (égal au nombre de ses colonnes) et  $Z = XA$  où A est une matrice carrée non singulière. Comparez les estimateurs des MCO des vecteurs des paramètres de ces deux modèles et les vecteurs des résidus.

### Exercice 3

Considérez le modèle de régression multiple sous forme matricielle :

$$y = X\beta + u$$

**3.1** Montrez que si l'espérance conditionnelle (à X) du terme d'erreur est nulle, on a les deux conditions de moment suivantes :

$$E(u) = 0$$

$$E(X'u) = 0$$

**3.2** Dédurre de ces conditions de moment que la covariance entre X et u est nulle.

**3.3** Montrez que l'estimateur de  $\beta$  par la méthode des moments qui satisfait ces deux conditions de moment coïncide avec celui des MCO.

### Exercice 4

Vous hésitez entre les deux spécifications économétriques suivantes :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

et

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u$$

**4.1** Décrivez une procédure pour choisir entre ces deux modèles s'appuyant sur un test de Student.

À présent, vous hésitez entre les deux modèles suivants :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

et

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log(x_1) + \beta_2 \log(x_2) + u$$

**4.2** Spécifiez un modèle dont ces deux modèles sont des cas particuliers.

**4.3** Explicitiez alors une méthode simple qui permettrait de choisir entre ces deux modèles.

**Problème** (12 points): Certaines théories de l'investissement en capital humain indiquent que le logarithme du taux de salaire ( $ltsal$ ) s'écrit en fonction du niveau d'éducation  $educ$  (compté en années), l'âge ( $agd$ ), un terme géométrique en l'âge ( $eag = d^{-agd}$  où  $d = 0.95$ ) et le sexe ( $s \in \{Homme = 1, Femme = 0\}$ ) :

$$ltsal = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 agd + \beta_3 d^{-agd} + \beta_4 s + u, \quad \text{Modèle } M1$$

où  $E(u | educ, agd, s) = 0$ .

On considère un échantillon de 1126 personnes, extrait de l'Enquête Emploi effectuée en France en 1999. En utilisant les données de l'échantillon, on obtient:

Source	SS	df	MS			
Model	30.2601323	4	7.56503307	Number of obs =	1126	
Residual	84.7940378	1121	.075641425	F( 4, 1121) =	100.01	
				Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.2630	
				Adj R-squared =	0.2604	
Total	115.05417	1125	.102270373	Root MSE =	.27503	

  

$ltsal$	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
$educ$	.0583929	.003221	18.13	0.000	.052073	.0647128
$agd$	.0148249	.0047616	3.11	0.002	.0054822	.0241676
$eag$	-.0153507	.0109452	-1.40	0.161	-.036826	.0061246
$s$	.1648505	.016521	9.98	0.000	.132435	.197266
$_cons$	.7586258	.1241574	6.11	0.000	.5150188	1.002233

(*Rappel*: les quantiles d'ordre 0.95, 0.975 et 0.995 d'une loi normale centrée et réduite sont égaux à 1.63, 1.96 et 2.58).

1. Expliciter pourquoi le modèle  $M1$  est linéaire.
2. Sous quelles conditions cet estimateur est BLUE? On admettra ces conditions dans la suite du problème.
3. Quel est le résultat du test à un niveau de 5% de  $H_0 : \beta_4 = 0.135$  contre  $H_a : \beta_4 > 0.135$ .
4. Quelle est la différence en moyenne du logarithme du taux de salaire entre une femme d'éducation ( $educ = 20$ ) et un homme d'éducation ( $educ = 17$ ) qui ont le même âge.
5. Que vous manque-t-il dans les résultats ci-dessus pour calculer la variance de cette différence?

On considère les résidus de la régression précédente,  $uc$ .

6. Quel est la valeur du  $R^2$  de la régression de  $uc$  sur les variables  $educ, agd, eag$  et  $s$  (en incluant une constante)?

7. On regresse  $uc$  sur les variables  $seduc = s * educ, sagd = s * agd$  et  $seag = s * eag$  les interactions de la variable  $s$  avec les autres variables (sans la constante ni  $educ, agd, eag$  et  $s$ ). Pour cette régression, on obtient une statistique de Fisher, égale à 0.42 dans cet échantillon, associée au test de la restriction linéaire multiple  $H_0$  : Les coefficients de ces interactions sont nuls contre  $H_a$  : L'un de ces coefficients est différent de zéro. Quelle est la loi de  $F$  sous l'hypothèse nulle?

8. La p-valeur associée à ce test est égale à 79%. Que concluez vous sur la validité de  $H_0$  en considérant un niveau de test de 5%?

On distingue les deux sous-échantillons composés par les hommes ( $s = 1$ ) et les femmes et on effectue la régression correspondante à  $M1$  dans chacun de ces échantillons. On obtient une somme

des carrés des résidus égale à 45.44 pour l'échantillon des hommes et égale à 39.09 pour l'échantillon des femmes.

9. Considérons l'hypothèse nulle:  $H_0$ : Les coefficients des variables *educ*, *agd* et *eag* sont égaux pour hommes et femmes contre  $H_a$  : L'un de ces coefficients est différent entre hommes et femmes. En utilisant les sommes des carrés des résidus et les résultats du modèle M1, construire la statistique de Fisher associée à ce couple d'hypothèses.

10. En dériver sa valeur.

11. Quelle est la loi de cette statistique sous la nulle? On donnera les degrés de liberté correspondants.

12. Le quantile à 95% de cette loi est égale à 2.61. Quel est le résultat du test si le niveau est égal à 5%?

13. Qu'en concluez vous sur les différences de salaire entre hommes et femmes?