

Licence 3 mention Économie
Epreuve : Théorie des Jeux – Code : L3-S5-52

Vos réponses doivent toutes être justifiées.

EXERCICE - COURS. Soit le jeu sous forme normale Γ représenté par la matrice suivante :

	A_2	B_2	C_2
A_1	(a,b)	(c,a)	(b,d)
B_1	(c,a)	(2a,c)	(d,c)

avec a, b, c et d des nombres réels non-négatifs.

1. Donner la définition d'un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu sous forme normale $G = (N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$. Donner l'ensemble des conditions sur la valeur des paramètres a, b, c et d sous lesquelles (A_1, A_2) est le seul équilibre de Nash en stratégies pures de Γ .
2. Décrire l'extension mixte du jeu Γ et donner la définition d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour ce jeu. Donner un ensemble de conditions (par exemple une valeur pour chaque paramètre a, b, c et d) sous lesquelles le profil de stratégies $(pA_1 + (1-p)B_1, pA_2 + (1-p)B_2)$ est un équilibre de Nash de Γ , avec $p \in]0, 1[$.

EXERCICE. Deux joueurs $i = 1, 2$ jouent au tennis. Le joueur 1 est au service. Il a le choix entre servir à droite (D) et servir à gauche (G). Le joueur 2 a le choix entre retourner le service prudemment (P) ou de façon risquée (R). Le jeu est simultané au sens où les deux joueurs prennent leur décision en même temps, avant le début du point. Pour chacune des issues possibles la probabilité de gain du joueur 1 est indiquée dans la matrice suivante :

Actions	(G, P)	(G, R)	(D, P)	(D, R)
Probabilités de Gain	60%	30%	45%	65%

L'objectif de chaque joueur est de maximiser son espérance de gain et on suppose qu'un joueur attribue une valeur de +10 au gain du point et une valeur de -10 à sa perte. Ainsi, le paiement du joueur 1 associé au couple d'actions (G, P) est $0,6 * (+10) + 0,4 * (-10) = +2$.

1. Représenter le jeu sous forme normale.
2. Représenter le jeu sous forme extensive et indiquer les différents sous-jeux.
3. Ce jeu possède-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ?
4. Caractériser l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes de ce jeu.
5. Pour cette question on suppose que le jeu est séquentiel, au sens où le joueur 1 joue en premier et le joueur 2 observe le choix du joueur 1 avant de prendre sa décision, et que les joueurs jouent en stratégies pures. Représenter ce jeu sous forme extensive, indiquer les différents sous-jeux et donner l'ensemble des équilibres de Nash parfait en sous-jeu de ce jeu. Représenter ce jeu sous forme normale et donner l'ensemble des équilibres de Nash de ce jeu.