Examen : année 2015-2016
SEMESTRE 5 en Sciences Économiques
$\boxed{\textbf{Probabilités et statistique}}$
Durée : 2h00

Seules les calculatrices de type Casio FX-92 sont autorisées.

Une seule grille est donnée.

Barème : une réponse juste vaut 1,4 point, une mauvaise réponse vaut 0 point et une non-réponse vaut 0 point.

Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1 Cinq questions indépendantes

Question 1 Soit A, B et C trois évènements. On suppose que A et B sont indépendants, que A et C sont indépendants et que B est inclus dans C. Alors A et $C \cap \bar{B}$ sont

(a) dépendants
(b) indépendants
(c) disjoints
(d) corrélés.

Question 2 Soit A, B et C trois évènements. Montrer que la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ peut s'écrire

(a) $P(B|C)P(A|BC) + P(\bar{B}|C)P(A|\bar{B}C)$
(b) $P(C|B)P(A|BC) + P(\bar{C}|B)P(A|B\bar{C})$
(c) $P(C|B)P(A|BC) + P(C|\bar{B})P(A|\bar{B}C)$
(d) $P(A|BC)P(C) + P(A|B\bar{C})P(\bar{C})$.

Question 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires (va) discrètes vérifiant $P(X = 0, Y = 0) = a$, $P(X = 1, Y = 0) = b$, $P(X = 0, Y = 1) = c$ et $P(X = 1, Y = 1) = d$, avec $a + b + c + d = 1$. Montrer que $d = (b + d)(c + d)$ est équivalent à

(a) X et Y sont indépendantes
(b) X et Y sont dépendantes
(c) X et Y sont corrélées positivement
(d) X et Y sont disjointes.

Question 4 Soit X et Y deux va de carré intégrable. Montrer que

(a)
$$\sqrt{E(X^2)E(Y^2)} - E(X)E(Y) < E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$
(b)
$$\sqrt{V(X)V(Y)} < E(|X - E(X)||Y - E(Y)|)$$
(c)
$$\sqrt{V(X)V(Y)} > \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} - E(X)E(Y)$$
(d)
$$\sqrt{V(X)V(Y)} \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} - E(X)E(Y).$$

Question 5 On casse une baguette rectiligne en bois de longueur 1 au hasard en deux endroits indépendants. La probabilité d'obtenir un triangle non applati avec les trois morceaux est égale à

(a) 1
(b) 1/2
(c) 1/3
(d) 1/4.

Exercice 2 Le nombre de véhicules spéciaux vendus en 2010 est une *va* X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Chaque véhicule vendu a (indépendamment des autres) une probabilité p d'être en bon état en 2014 et une probabilité $q = 1 - p$ d'etre hors d'usage en 2014. On note Y la *va* représentant le nombre de véhicules en bon état en 2014.

Question 6 La loi condtionnelle exacte de Y sachant $X = x$ ($x \geq 1$) est une loi

(a) de Poisson $\mathcal{P}(px)$
(b) binomiale $\mathcal{B}(x; p)$
(c) binomiale $\mathcal{B}(x; q)$
(d) de Poisson $\mathcal{P}(qx)$.

Question 7 L'espérance conditionnelle $E(Y|X)$ et la variance conditionnelle $V(Y/X)$ valent respectivement

(a) pX et pqx
(b) pX et pqX
(c) px et pqx
(d) qX et pqX.

Question 8 Pour tout (x, y) avec $0 \leq y \leq x$, la probabilité conjointe $p_{x,y} = P(X = x, Y = y)$ vaut

(a) $\exp(-\lambda)\lambda^x \frac{p^y q^{x-y}}{y!(x-y)!}$
(b) $\exp(-\lambda)\lambda^x \frac{p^y q^x}{y!x!}$
(c) $\exp(-\lambda)\lambda^y \frac{p^x q^{y-x}}{x!(y-x)!}$
(d) $\exp(-\lambda)\lambda^y \frac{p^x q^{x-y}}{y!(x-y)!}$.

Question 9 En déduire que la loi marginale de Y est

(a) une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$
(b) une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda pq)$
(c) une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$
(d) une loi binomiale $\mathcal{B}(x; \lambda p)$.

Question 10 De manière similaire, on montre que la loi de $X - Y$ est

(a) une loi binomiale $\mathcal{B}(x; \lambda q)$
(b) une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$
(c) une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$
(d) une loi de Poisson $\mathcal{P}(q)$.

Question 11 Montrer que Y et $X - Y$ sont

(a) indépendantes
(b) dépendantes
(c) corrélées
(d) on ne peut rien dire.

Question 12 $E[(Y - E(Y|X))^2]$ vaut

(a) 0
(b) λp^2
(c) λq.
(d) λpq.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *va* indépendantes de même loi uniforme continue sur $[0,1]$. On note $M_n = sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = n(1-M_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Question 13 La fonction de répartition de Y_n est définie par

(a) $F_n(t) = 1 - (1 - \frac{t}{n})^n \mathbb{1}_{(0;n)}(t)$
(b) $F_n(t) = 1 - (1 - \frac{t}{n})^n \mathbb{1}_{(0;1)}(t)$
(c) $F_n(t) = 1 - (1 - \frac{t}{n})^n$
(d) $F_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \mathbb{1}_{(0;n)}(t)$.

Question 14 La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers

(a) une loi exponentielle de paramètre égal à 1
(b) une loi γ_2
(c) une loi normale centrée-réduite
(d) une loi univorme continue sur $[0;1]$.

Question 15 Laquelle de ces affirmations est fausse pour une suite de *va*

(a) la convergence en probabilité implique la convergence en loi
(b) la convergence presque-sûre implique la convergence en probabilité
(c) la convergence en loi est équivalente à la convergence en probabilité
(d) la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.

COLLER
VERTICALEMENT
LA
TROISIÈME
ÉTIQUETTE
ICI

Grille des réponses

Barème : une réponse juste vaut 1,4 points, une mauvaise réponse vaut 0 point et une non-réponse vaut 0 point.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1.				
Question 2.				
Question 3.				
Question 4.				
Question 5.				
Question 6.				
Question 7.				
Question 8.				
Question 9.				
Question 10.				
Question 11.				
Question 12.				
Question 13.				
Question 14.				
Question 15.				