

Seule la calculatrice FX-92 est autorisée.

1. Soit  $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $q$  la forme quadratique canoniquement associée à  $M$ .
- (a) Pourquoi la matrice  $M$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ?  
Quelles sont ses valeurs propres ? Quelle est sa signature ?  
Calculer une base orthonormée qui diagonalise  $M$ .
  - (b) Quelles sont les solutions des problèmes de minimisation et de maximisation de  $q$  sur la sphère unité ?
2. (a) Calculer le rayon de convergence de la série entière suivante :  $\sum \frac{(n+2)!x^n}{(2n+1)!}$ .
- (b) Calculer la somme suivante :  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left( \frac{k+2}{k!} + \frac{7}{3^k} \right)$ .
3. (a) Déterminer le gradient et la matrice hessienne de  $f(x, y, z) = xyz - 2x - 2y - 2z$
- (b) Quels sont les points critiques de  $f$  ? Sont-ils dégénérés ?
4. Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $e^{20A}$  et  $A^{20}$ .

Barème envisagé :    1)5+2    2)2+3    3)2+2    4)4