

LICENCE 3 MENTION ECONOMIE

Mathématiques

Seule la calculatrice FX-92 est autorisée.

- Soit q la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x(x - 4y + 4z) + 2yz$ et A la matrice symétrique canoniquement associée à q .
 - Déterminer la signature de q de deux manières :
D'abord par la méthode de GAUSS, puis en étudiant le signe des mineurs principaux emboîtés de A .
 - Donner la factorisation QR de la matrice A .
- Les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^3 sont-ils fermés ? ouverts ? bornés ? compacts ? (Donnez toutes les réponses dans un tableau, puis justifiez-les rapidement)

$$K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x^2 - y^2 = z^2, xyz \leq 2\}$$

$$K_2 = \{(s + 2t, s^3 - t^3); (s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } s^2 + 2t^2 \leq 4\}$$
- Etudier la convergence des séries suivantes : $\sum \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$ et $\sum \frac{\sqrt{5n+1}}{n!}$.
 - Calculer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum \frac{3^n (n+7)^3 x^n}{7^{n+3}}$.
- Soit f la fonction de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ dans \mathbb{R}^{+*} , définie par $f(x, y) = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{3x^2+xy+2y^2}$.
 - Montrer que f est positivement homogène, d'un degré α qu'on précisera.
 - Quel est le degré d'homogénéité de $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^3$?
 - Calculer : $\frac{x^2}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2xy}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Barème envisagé : 1)4+4 2)4 3)3+2 4)1+1+1