

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Questions de cours (2 points)

Donner le théorème central limite et la loi des grands nombres avec les notations du cours.

Exercice 1 (7 points)

Soit (X_1, X_2) un échantillon de deux variables i.i.d. admettant pour densité :

$$f(\theta, x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \mathbb{I}_{(0, \theta)}(x),$$

où θ est un paramètre strictement positif.

1. On considère l'estimateur de θ défini par $\hat{\theta}_1 = \frac{7}{6} \max(X_1, X_2)$. On admettra que la densité de $\hat{\theta}_1$ s'écrit :

$$f_1(y) = \frac{6^7 y^5}{7^6 \theta^6} \mathbb{I}_{(0, 7\theta/6)}(y).$$

Montrer que $\hat{\theta}_1$ est sans biais.

2. On considère un deuxième estimateur de θ défini par $\hat{\theta}_2 = \frac{2}{3}(X_1 + X_2)$. Montrer que $\hat{\theta}_2$ est sans biais.
3. Calculer les EQM des estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$.
4. Entre $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$, quel estimateur choisiriez-vous ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (4 points)

Une compagnie offre un service à sa clientèle par téléphone. On suppose que la durée de vie (en minutes) de chaque conversation suit une loi normale de moyenne inconnue et d'écart-type égal à 4 minutes. Sur un échantillon de 300 appels, on observe un temps d'appel moyen de 8 minutes.

1. Donner un intervalle de confiance au niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ pour le temps d'appel moyen.
2. Quelle taille d'échantillon faut-il prendre afin que l'amplitude de l'intervalle de confiance du temps d'appel moyen soit inférieure à 2 minutes ?

Exercice 3 (7 points)

Pour étudier un lot de fabrication de comprimés dont le poids moyen est supposé de 80 milligrammes, le contrôleur qualité prélève au hasard 10 comprimés et les pèse. Il obtient ainsi les 10 observations suivantes pour la v.a.r. X représentant le poids d'un comprimé (en milligrammes) :

$$81 - 84 - 83 - 80 - 85 - 86 - 85 - 83 - 84 - 80.$$

On suppose que X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .

1. Donner un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de confiance $1 - \alpha = 90\%$. On donne $\chi_{0,05}^2(9) = 19,919$ et $\chi_{0,95}^2(9) = 3,325$.
2. Réaliser, pour l'ingénieur, un test statistique au niveau $\alpha = 5\%$ de l'hypothèse $H_0 : \mu = 80$ contre une hypothèse bilatérale H_1 que l'on précisera. On donne $t_{0,025}(9) = 2,262$.