Licence 2 mention Economie parcours économie et mathématiques et informatique appliquées
Epreuve : PROBABILITES 2 – C. GRUEN - Code : L2-S4-12

Pas de document. Calculatrice Casio FX-92 autorisée.
Justifier soigneusement toutes vos réponses.

---

1. Soit Ω un ensemble dénombrable, non vide et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$. (1P)
   (b) Donner la définition d'un couple de variables aléatoires (discrètes) sur $(\Omega, \mathcal{F})$. (0,5P)
   (c) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires (discrètes) sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Donner des conditions nécessaires tel que la probabilité conditionnelle que $X = x$ sachant $Y = y$ soit bien défini et dans ce cas donner la définition. (1,5P)
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densité
$$f_X(t) = \alpha\ t\ \mathbb{1}_{]0,4[}(t).$$
   a) Déterminer la constante α. (1P)
   b) Quelle est la fonction de répartition de $Y = (X-2)^2$? En déduire la de densité de Y. (4P)
   c) Calculer l'espérance de Y. (2P)
3. On jette un dé bleu et un rouge. On note X les points indiquées par le dé bleu, Y ceux du dé rouge et on définit la variable aléatoire Z de la manière suivante :
$$Z = \begin{cases} X & \text{si } X \leq 3, \\ Y & \text{si } X > 3 \text{ et } Y > 3, \\ Y+3 & \text{si } X > 3 \text{ et } Y \leq 3. \end{cases}$$
   (a) Déterminer les lois des couples (X, Y) et (X, Z). Vérifier que ces couples ont les mêmes lois marginales mais pas la même loi. (5P)
   (b) X et Z sont-elles indépendantes ? (1P)
4. On considère un couple de variable aléatoires (X,Y) absolument continue de densité
$$f_{X,Y}(t,s) := \alpha((1-x^2)1_{[0,1]}(x)\ ye^{-3y}1_{]0,+\infty[}(y)),$$
   où α est un réel.
   (a) Déterminer la valeur du réel α. (2P)
   (b) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y du couple (X, Y). (1P)
   (c) (X, Y) sont elles indépendantes ? Quelle est la covariance du couple (X, Y). (1P)
5. (Bonus) Soient X, Y, Z trois variables indépendantes distribués selon la loi uniforme sur [0,1] $(X, Y, Z \sim \mathcal{U}_{[0,1]})$. Calculer la loi de $X + Y$ ainsi que la loi de $X + Y + Z$ (+5P).
   (On pourra utiliser le résultat du cours que $X + Y$ est une variable aléatoire et la loi de $X + Y$ est caractérisée par :
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s) f_Y(z-s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-s) f_Y(s) ds.)$$