TSE

Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 4

Licence 2 mention Economie parcours Economie et Mathématiques et Informatique Appliquées
EPREUVE : PROBABILITES 2
Date de l'épreuve : **12 mai 2016**
Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucune

Liste des matériels autorisés : Calculatrice Casio FX-92

Nombre de pages (y compris page de garde) : 3

Université Toulouse 1

Licence Economie-Mathématiques 2eme Année

Examen - 12 mai 2016 - Probabilités 2

Pas de document. Calculatrice Casio FX-92 autorisée.
Justifier soigneusement toutes vos réponses.

---

1. Soit Ω un ensemble dénombrable, non vide et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$. (1P)
   (b) Donner la définition d'une variable aléatoire (discrète) sur $(\Omega, \mathcal{F})$. (0,5P)
   (c) Soient X, Y deux variables aléatoires (discrètes). Donner la définition de la loi conjointe du couple (X, Y). La loi conjointe du couple (X, Y) est une probabilité sur quel ensemble ? (1P)
   (d) Exprimer la loi marginale de X en terme de loi conjointe. Justifier. (1,5P)

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densité
$$f_X(t) = \alpha\left((t+1)\mathbb{1}_{]-1,0[}(t) + (1-t)\mathbb{1}_{]0,1[}(t)\right).$$
   a) Déterminer α. (0,5P)
   b) On pose, pour tout $\omega \in \Omega$
$$Y(\omega) = -\ln(1 + X(\omega)).$$
   Montrer que Y est une variable aléatoire bien définie et déterminer la densité de Y. (1,5P)
   c) Calculer l'espérance de Y. (1P)

3. Soient X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p = \frac{1}{4}$. Soit $U = X + Y$, $V = X - Y$:
   (a) Déterminer la loi du couple (U, V) et les lois marginales. (2P)
   (b) Déterminer la covariance de (U, V). (1P)
   (c) U et V sont-elles indépendantes ? (1P)
   (d) Pour tout $i \in U(\Omega)$, déterminer la probabilité conditionnelle que $U = i$ sachant que $V = 0$. (1P)

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles absolument continues de loi
$$f_{X,Y}(t, s) := \alpha(e^{\frac{1}{2}(t^2 - ts + s^2)}),$$
   où α est un réel.

(a) Déterminer la valeur du réel α. (2P)
(On pourra utiliser que $\frac{1}{2}(t^2 - ts + s^2) = \frac{1}{2}(t - \frac{s}{2})^2 + \frac{3}{8}s^2$.)

(b) Préciser les densités respectives des variables aléatoires absolument continues X et Y. (1P)

(c) Le les variables aléatoires réelles X et Y sont elles indépendantes ? (1P)

5. Soient X, Y deux variables indépendantes de lois géométriques de même paramètre $p \in (0, 1)$.

(a) Calculer la loi de $Z = X + Y$. (2 P)
(On pourra utiliser le résultat du cours que $X + Y$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et la loi de $X + Y$ est caractérisée par : pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(X + Y = i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = i - j, Y = j).)$$

(b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la loi conditionelle de X sachant $Z = n$, c.à.d.

$$P(X = k | Z = n) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (1P)$$

(c) Décrire une expérience pouvant être modélisée par Z. (1P)

6. (Bonus) Soit X une variable de Poisson de paramètre λ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est nul ou impair} \\ \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance. (+4P)
(Astuce : Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$)