



UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE
ECOLE D'ÉCONOMIE DE TOULOUSE

Année universitaire 2015-2016

Session 1

Semestre 4

Licence 2 mention Economie parcours économie-mathématiques et informatique appliquées

EPREUVE : INTEGRALES ET SERIES

Date de l'épreuve : 10 mai 2016

Durée de l'épreuve : 1h30

liste des documents autorisés : aucun

liste des matériels autorisés : aucun

nombre de pages : 3

Exercice 1.

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de I sur $\mathbb{R}$ et f une application de I sur $\mathbb{R}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , alors f est continue en x_0 .

Exercice 2.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{1 + n^2 x^7}.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 3.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in [1, +\infty], \quad f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $[1, +\infty]$? uniformément sur $[1, +\infty]$?

Exercice 4.

Etudier en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^a(x+1)^b}.$$

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction du réel α .

1. On suppose $\alpha > 1$, montrer que la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

2. Supposons maintenant $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$. On définit la fonction φ par

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \varphi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt.$$

(a) A l'aide d'un changement de variable démontrer que pour tout $x > 1$, on a

$$\int_1^x \varphi(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy.$$

(b) En déduire que

$$\int_1^x \varphi(t) dt = 2 \left(-\frac{\cos(\pi y)}{\pi x^{\alpha-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi} \right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy.$$

(c) Démontrer que $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi\sqrt{y})}{y^{2\alpha}} dy$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

(d) Démontrer qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall t \geq 1, |\varphi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

(e) En déduire que : $\forall a, b \in [1, +\infty[, a \leq b, |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}} |a - b|$.

(f) Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$ à l'aide de l'intégrale de φ . En déduire la nature de $\sum v_n$.

(g) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t)) dt$.

(h) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ on a $|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. En déduire la nature de la série $\sum (u_n - v_n)$.

(i) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.