Licence 2 mention Économie parcours économie et mathématique et informatique
Épreuve : ANALYSE NUMÉRIQUE–I. SCHINDLER-Code : L2-S4-10

Exercice 1

Soient $b \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ $(a_1 \neq 0)$, $x = \pm b^p \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$, M la longueur de la mantisse et x' la valeur de x retenue par l'ordinateur.

1. Montrer que $\Delta x = |x - x'| \leq b^{p-M}$.
2. En déduire que $\frac{\Delta x}{|x|} \leq b^{1-M}$.
3. On appelle b^{1-M} comment ?

Exercice 2

Soient $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ et

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & \mathbb{R}_n[x] \mapsto \mathbb{R}^{n+1} \\ & p_n(x) \mapsto [p_n(x_0), \ldots, p(x_n)] \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire. En déduire que ϕ est surjective si et seulement si ϕ est injective.
2. Montrer que ker $\phi = \{0\}$. En déduire l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Exercice 3

Soient $(x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. Quelle conditions doivent vérifier x_1, x_2, λ_1 et λ_2 pour que T soit une méthode d'intégration

1. d'ordre au moins 0 ?
2. d'ordre au moins 1 ?
3. d'ordre au moins 2 ?

Exercice 4

Soit $\phi : [a, b] \to [c, d]$ de classe $C^1(\mathbb{R})$ telle que $\phi'(x) \geq k > 1$ et telle que ϕ admet un point fixe $\alpha \in]a, b[$ (cad $\phi(\alpha) = \alpha$).

1. Montrer que $d - c > b - a$.
2. Montrer que ϕ n'a pas 2 points fixes.
3. Montrer que pour $x \in [a, b]$, $\phi(x) = \alpha$ que dans le cas où $x = \alpha$.
4. Montrer que la suite définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge si est seulement si $x_0 = \alpha$.