TSE
Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015–2016
Session 1 – semestre 4

Licence 2 mention Économie parcours Économie et Mathématique et Informatique Appliquées
ÉPREUVE : ANALYSE NUMÉRIQUE
Date de l'épreuve : **13 mai 2016**
Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun
Liste de matériels autorisés : aucun
Nombre de pages : 2

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, une suite définit par

$$u_n = 1/n - 10u_{n-1}. \tag{1}$$

On suppose que u_0 est tel que $u_n > 0\,\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. On se propose d'approcher la valeur u_5 avec un ordinateur. On note la valeur approchée de u_n par v_n.

1. Si $|u_{n-1} - v_{n-1}| = \delta$, estimer $|u_n - v_n|$ obtenue en utilisant (1) pour calculer u_n.
2. Estimer $|u_5 - v_5|$ si on connaît une valeur approchée v_0 de u_0 telle que $|v_0 - u_0| \approx 10^{-6}$, et on utilise (1) pour approcher u_5 à partir de v_0.
3. Montrer que $l = 0$.
4. Donner une méthode pour estimer u_5 sachant u_9.
5. Montrer que $0 < u_9 < 1/9$.
6. Donner une valeur approchée v_9 de u_9 utilisable dans la méthode établie à la question 4, ainsi qu'une estimation de l'erreur $|v_9 - u_9|$.
7. Quel valeur de départ donne la meilleur précision, v_0 ou v_9 ?

Exercice 2

Soit

$$\begin{aligned} g(x) : [-1;1] &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{(5-2x)}. \end{aligned}$$

1. Donner le polynôme $p_2(x)$ qui interpole $g(x)$ au points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.
2. Majorer l'erreur entre $p_2(x)$ et $g(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Exercice 3

1. Rappeler la définition des polynômes de Tchebychef $t_n(x)$.
2. Déterminer les racines de $t_1(x)$, $t_2(x)$ et $t_3(x)$ dans $[-1, 1]$.
3. Majorer l'erreur entre $g(x)$ et $\tilde{p}_2(x)$, $x \in [-1, 1]$ où $\tilde{p}_2(x)$ est le polynôme d'interpolation de $g(x)$ de degré 2 obtenu avec le noeuds (ou points) de Tchebychev.

Exercice 4

On cherche une valeur rapprochée de $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$, où $g(x)$ est la fonction de l'exercice 2 par la méthode du point milieu avec un pas de 1 (méthode composée, deux intervalles).

1. Calculer la valeur approchée.
2. Majorer l'erreur entre l'intégrale et sa valeur approchée.

Exercice 5

Soit $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 3x^3 - 8x + 2$.

1. Étudier les variations de $f(x)$ et trouver le nombre de racines de $f(x)$.
2. Localiser la plus grande racine dans un intervalle de la forme $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une fonction $\phi(x)$ (autre que la fonction $\phi_N(x)$ obtenue par la méthode de Newton) pour laquelle les racines de $f(x)$ sont les points fixes de $\phi(x)$.
4. Classifier la plus grande racine a (attractif, répulsif etc.) par rapport à $\phi(x)$.
5. Définir une suite (x_p) qui converge vers a en spécifiant x_0.
6. Majorer $|x_p - a|$.
7. Calculer $\phi_N(x)$ de la méthode de Newton.
8. Si $x_0 = 0$, est que la suite itérative définie par $x_{p+1} = \phi_N(x_p)$ converge ? Si oui, vers quelle racine ?