Licence 2 mention Economie parcours économie-mathématiques et informatique appliquées

Epreuve : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES – P. BEGOUT – Code : L2-S3-11

Les documents et appareils électroniques sont interdits
Un soin particulier sera porté à la rédaction et la présentation
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

Exercice 1. On pose : $\Omega = [0,1] \times [0,1[$.

1) Déterminer si Ω est un fermé, ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Sans calculs, justifier pourquoi $\Omega \subsetneq \overline{\Omega}$.

3) Sans calculs, justifier pourquoi $\overline{\Omega} \subset [0,1]^2$.

4) Déterminer $\overline{\Omega}$.

Exercice 2. On définit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x^2 + y^2$.

1) En utilisant uniquement la définition de différentiabilité, montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle.

2) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, puis que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Déterminer la différentielle seconde de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ et déterminer toutes les différentielles d'ordre supérieur.

4) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

5) Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x,y)$.

6) En utilisant uniquement les deux questions précédentes, montrer que f admet un unique minimum global. Déterminer ensuite ce point de minimum ainsi que la valeur de ce minimum.

Exercice 3 (Cours).

1) Soit U un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^N$. Rappeler la définition de U convexe de $\mathbb{R}^N$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Rappeler la définition de f convexe sur $\mathbb{R}^N$.