Toulouse School of Economics
École d'économie de Toulouse

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 3

Licence 2 mention Economie parcours économie-mathématiques et informatique appliquées

EPREUVE : FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Date de l'épreuve : **06/01/2016**

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : Rien

Liste des matériels autorisés : Rien

Nombre de pages : 3

Examen – Durée : 1h30

Les documents et appareils électroniques sont interdits, y compris la calculatrice
Un soin particulier sera porté à la rédaction et la présentation
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

Exercice 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{xy}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que $\Omega \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; xy \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

3) Montrer que f est continue en $\mathbb{R}^2$.

4) Pour tout $(x,y) \in \Omega$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

5) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

6) Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

5) La fonction f est-elle différentiable deux fois à l'origine ?

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice 3. On pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

1) Rappeler brièvement pourquoi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

2) Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{\|(x,y\|_2 \to +\infty} f(x,y)$. Que peut-on en conclure ?

3) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f''(x,y) \cdot \left(\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \right) > 0$. Que peut-on en conclure ?

4) À l'aide des deux question précédentes, montrer que f admet un unique minimum global.

5) Déterminer ce point et la valeur de ce minimum.