

Barème approximatif : Exercice 1 : 12pts, Exercice 2 : 8pts
 Consigne : arrondir les résultats à 3 chiffres après la virgule.

Exercice 1

Soit $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)^T$ un vecteur gaussien de \mathbb{R}^4 de loi

$$\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

1. Donner, sans justifier, les lois de Z_1 , de Z_2 et de $\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la loi de $S = Z_2 + Z_3$. Les variables S et Z_1 sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Déterminer est la loi de $U = Z_4 - 2$. Montrer que U et Z_2 sont indépendantes.
4. Déterminer la loi de $V = \frac{(Z_2-1)^2}{3}$.
5. Déterminer la loi de $C = \frac{U}{\sqrt{V}}$.
6. Montrer que $W = \frac{6(Z_4 - 2)^2}{3Z_1^2 + (Z_2 - 1)^2}$ suit une loi de Fisher dont les paramètres sont à préciser.

Exercice 2

Le nombre moyen d'heures de vols des pilotes de la North airlines est de 49 heures par mois. On suppose que cette moyenne a été calculée sur la base d'un échantillon de 101 pilotes de la North airlines et que l'écart-type estimé est de 8.5 heures.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau de confiance asymptotique 95%, pour le nombre d'heures moyen de vols sur l'ensemble des pilotes de la compagnie. Interpréter cet intervalle de confiance.
2. Lors d'un mouvement syndical des pilotes de compagnies aériennes, un responsable syndical dénonce un nombre d'heures de vols moyen trop élevé de 55 heures. Commenter ses propos.
3. On souhaite comparer le nombre moyen d'heures de vols de l'ensemble des pilotes de la North airlines et celui de l'ensemble des pilotes de la South airlines. Celui-ci a été estimé à 46.5 heures, sur la base d'un échantillon composé de 81 pilotes, avec un écart-type estimé de 7.5 heures. Soient X et Y correspondant respectivement au nombre d'heures de vols d'un pilote de la North airlines et de la South airlines. On suppose que X et Y sont gaussiennes.
 - (a) Peut-on supposer avec un niveau de confiance de 10 % que les variances des variables aléatoires X et Y sont égales ?
 - (b) A l'aide d'un test statistique au niveau 10%, étudier si le nombre moyen d'heures de vols de l'ensemble des pilotes de la North airlines est supérieur à celui de l'ensemble des pilotes de la South airlines.
 - (c) Déterminer un encadrement de la P-valeur du test précédent. Interpréter.

Loi de Fisher

Quantiles d'ordre 0.95 d'une loi de Fisher à p et q degrés de liberté : Valeurs de x telles que $P(X \leq x) = 0.95$, avec $X \sim F_{p,q}$.

q/p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	24	40	50	60	80	100	120
1	161.45	199.5	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	249.05	251.14	251.77	252.2	252.72	253.04	253.25
2	18.513	19	19.164	19.247	19.296	19.33	19.353	19.371	19.385	19.396	19.413	19.429	19.454	19.471	19.476	19.479	19.483	19.486	19.487
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6385	8.5944	8.581	8.572	8.5607	8.5539	8.5494
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.7744	5.717	5.6995	5.6877	5.673	5.6641	5.6581
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5272	4.4638	4.4444	4.4314	4.415	4.4051	4.3985
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381	3.8415	3.7743	3.7537	3.7398	3.7223	3.7117	3.7047
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5972	3.5107	3.4105	3.3404	3.3189	3.3043	3.286	3.2749	3.2674
8	5.3177	4.4565	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1152	3.0428	3.0204	3.0053	2.9862	2.9747	2.9669
9	5.1174	4.2563	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9005	2.8259	2.8028	2.7872	2.7675	2.7556	2.7475
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845	2.7372	2.6609	2.6371	2.6211	2.6008	2.5884	2.5801
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.609	2.5309	2.5066	2.4901	2.4692	2.4566	2.448
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5055	2.4259	2.401	2.3842	2.3628	2.3498	2.341
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331	2.4202	2.3392	2.3138	2.2966	2.2747	2.2614	2.2524
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463	2.3487	2.2664	2.2405	2.2229	2.2006	2.187	2.1778
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.2878	2.2043	2.178	2.1601	2.1373	2.1234	2.1141
16	4.494	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4249	2.3507	2.2352	2.1507	2.124	2.1058	2.0826	2.0685	2.0589
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.1922	2.1077	2.081	2.0629	2.0384	2.024	2.0107
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1531	2.0686	2.041	2.0226	1.9975	1.983	1.9702
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341	2.1186	2.0341	2.0064	1.9986	1.9735	1.9592	1.9463
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.0878	1.9938	1.9656	1.9566	1.9315	1.9172	1.9043
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757	2.0602	1.9662	1.938	1.9292	1.9041	1.8898	1.8769
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0353	1.9413	1.913	1.9042	1.8791	1.8648	1.8519
23	4.2793	3.4221	3.0278	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0127	1.9187	1.8902	1.8811	1.856	1.8418	1.8289
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	1.9922	1.8982	1.8697	1.8606	1.8355	1.8212	1.8083
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	1.9734	1.8794	1.8509	1.8418	1.8167	1.8024	1.7895
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.8993	1.8053	1.7768	1.7677	1.7426	1.7283	1.7154
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245	1.809	1.715	1.6865	1.6774	1.6523	1.638	1.6251
50	4.0343	3.1826	2.79	2.5572	2.4004	2.2864	2.1992	2.1299	2.0734	2.0261	1.9515	1.8714	1.7559	1.6615	1.6325	1.6234	1.5983	1.584	1.5711
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7209	1.6265	1.5975	1.5884	1.5633	1.549	1.5361
80	3.9604	3.1108	2.7188	2.4859	2.3287	2.2142	2.1263	2.0564	1.9991	1.9512	1.8753	1.7932	1.6777	1.5833	1.5543	1.5452	1.5201	1.5058	1.4929
100	3.9361	3.0873	2.6955	2.4626	2.3053	2.1906	2.1025	2.0323	1.9748	1.9267	1.8503	1.7675	1.652	1.5576	1.5286	1.5195	1.4944	1.4801	1.4672
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.635	1.5406	1.5116	1.5025	1.4774	1.4631	1.4502

p. 4

Loi normale

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Pour $x < 0$, utiliser $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.8906
$\Phi(x)$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995