

Année universitaire 2015-2016

Session 1 - Semestre 4

**Licence 2 mention Economie parcours Economie et Gestion
Licence 2 mention Economie parcours Economie et Droit**

ÉPREUVE : STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

Date de l'épreuve : **11 mai 2016**

Durée de l'épreuve : 1h30

Liste des documents autorisés : aucun

Liste des matériels autorisés : calculatrice type fx 92 Casio

Nombre de pages (y compris page de garde) : 5

Consigne : arrondir les résultats à 3 chiffres après la virgule.

Exercice 1 : 10 pts

Afin d'évaluer l'efficacité d'un somnifère appelé *Dodo max*, un laboratoire médical s'intéresse à la durée X (exprimée en heures) d'une nuit de sommeil d'une personne prenant un comprimé *Dodo max* le soir avant de se coucher. Afin de mener une étude approfondie, on constitue, dans un premier temps, un groupe d'étude G_1 formés de $n = 51$ patients qui reçoivent le somnifère *Dodo max*. On enregistre le nombre d'heures de sommeil de chacun des patients du groupe G_1 . On obtient une durée de sommeil moyenne de $\bar{x}_n = 6.80$ heures avec un écart-type estimé de $s_n = 0.32$. Par ailleurs, on interroge les individus du groupe G_1 afin de savoir si le somnifère leur a permis d'augmenter leur nombre d'heures de sommeil. Parmi ces personnes, 34 d'entre elles affirment que le somnifère leur a permis de dormir plus longtemps alors que les 17 autres déclarent n'avoir constaté aucune amélioration.

1. Construire un intervalle de confiance à 90% de la durée moyenne μ_{max} d'une nuit de sommeil pour une personne ayant pris un somnifère *Dodo max* au coucher.
2. On note p la proportion de personnes ayant déjà fait usage de *Dodo max* et qui déclarent avoir dormi plus longtemps grâce au somnifère. Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion p à partir des données fournies par l'étude du groupe G_1 . Interpréter.
3. Le laboratoire d'étude considère qu'un somnifère est efficace s'il permet à une personne de dormir plus de 6.70 heures consécutives.
 - (a) Tester au niveau $\alpha = 5\%$ l'hypothèse nulle $H_0 : \mu_{max} \leq 6.7$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu_{max} > 6.7$.
 - (b) Calculer la p-valeur du test précédent.
 - (c) Le somnifère *Dodo max* est-il déclaré efficace par le laboratoire au niveau $\alpha = 1\%$? Justifier.
4. Le laboratoire souhaite maintenant évaluer l'efficacité d'un nouveau somnifère *Dodo plus* dont la formule représente une possible amélioration de celle de *Dodo max*. Un deuxième groupe d'étude G_2 est formé de $m = 101$ individus (n'ayant pas participé à la première étude) qui reçoivent le nouveau somnifère. La durée moyenne de sommeil dans le groupe G_2 est de 6.90 heures avec un écart-type estimé de 0.27 heures. Soit Y la durée de sommeil d'un individu prenant le somnifère *Dodo plus*. Dans la suite, nous supposons que X et Y suivent des lois normales.
 - (a) On note σ_{max}^2 (resp. σ_{plus}^2) la variance de X (resp. Y). Déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 90% pour $\frac{\sigma_{max}^2}{\sigma_{plus}^2}$. Interpréter cet intervalle de confiance.
 - (b) On note μ_{plus} la durée moyenne de sommeil d'une personne ayant reçu le somnifère *Dodo plus* au coucher. Afin de déterminer si la nouvelle version *Dodo plus* doit être préférée à l'ancienne version *Dodo max*, tester au niveau $\alpha = 10\%$ l'hypothèse nulle $H_0 : \mu_{plus} \leq \mu_{max}$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu_{plus} > \mu_{max}$. Conclure.
 - (c) Pour quel(s) niveau(x) de test, le résultat du test précédent serait-il différent?

Coller ici votre étiquette :

Exercice 2 : Réponses courtes (10 pts)

Dans cet exercice, il n'est pas demandé de rédiger : les réponses doivent être courtes et écrites directement sur la feuille.

Cette feuille doit être détachée du sujet puis glissée dans votre copie.

1. Énoncer le théorème central limite.

.....
.....
.....
.....

2. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite.

(a) $2X_1 - X_2 + X_3 \sim \dots\dots\dots$

(b) Connait-on la loi de $\frac{X_1^2 + X_2^2}{X_2^2 + X_3^2}$? Justifier et la donner si cela est possible.

.....
.....

(c) $P(X_2^2 + X_3^2 \geq \dots\dots\dots) = 0.05$

3. On suppose avoir effectué un sondage sur la popularité d'un homme politique auprès des Français et on obtient une proportion \hat{p} égale à 30% d'opinions favorables à cet homme politique.

(a) Au moins combien de personnes doivent avoir été interrogées si on souhaite que la proportion d'opinions favorables au niveau de la population entière ne s'écarte pas de \hat{p} de plus de 2 points avec un niveau de confiance de 95% ?

Calcul :
.....
Résultat :

(b) On supposera dans cette question que le sondage précédent avait été effectué sur un échantillon de 2000 Français. Deux semaines plus tard, on effectue un autre sondage sur la popularité de cet homme politique auprès des Français. Sur les 1000 personnes interrogées, 340 ont répondu être favorable à sa politique.

Vérifier à l'aide d'un test de niveau 5% que la popularité de cet homme politique auprès des Français a augmenté pendant ces deux semaines.

Hypothèses (expliciter les notations utilisées) :
.....

Statistique de test :

Loi de Z sous H_0 :

Zone de rejet :

Valeur observée de Z :

Décision et interprétation :

Loi normale

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Pour $x < 0$, utiliser $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Loi de Fisher

Quantiles d'ordre 0.95 d'une loi de Fisher à p et q degrés de liberté : Valeurs de x telles que $P(X \leq x) = 0.95$, avec $X \sim F_{p,q}$.

q/p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	24	40	50	60	80	100	120
1	161.45	199.5	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	249.05	251.14	251.77	252.2	252.72	253.04	253.25
2	18.513	19	19.164	19.247	19.296	19.33	19.353	19.371	19.385	19.396	19.413	19.429	19.454	19.471	19.476	19.479	19.483	19.486	19.487
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6385	8.5944	8.581	8.572	8.5607	8.5539	8.5494
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2503	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.7744	5.717	5.6995	5.6877	5.673	5.6641	5.6581
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5272	4.4638	4.4444	4.4314	4.415	4.4051	4.3985
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381	3.8415	3.7743	3.7537	3.7398	3.7223	3.7117	3.7047
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4105	3.3404	3.3189	3.3043	3.286	3.2749	3.2674
8	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1152	3.0428	3.0204	3.0053	2.9862	2.9747	2.9669
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845	2.7372	2.6609	2.6371	2.6211	2.6008	2.5884	2.5801
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.609	2.5309	2.5066	2.4901	2.4692	2.4566	2.448
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5055	2.4259	2.401	2.3842	2.3628	2.3498	2.341
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331	2.4202	2.3392	2.3138	2.2966	2.2747	2.2614	2.2524
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463	2.3487	2.2664	2.2405	2.2229	2.2006	2.187	2.1778
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.2878	2.2043	2.178	2.1601	2.1373	2.1234	2.1141
16	4.494	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2354	2.1507	2.124	2.1058	2.0826	2.0685	2.0589
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.1898	2.104	2.0769	2.0584	2.0348	2.0204	2.0107
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1497	2.0629	2.0354	2.0166	1.9927	1.978	1.9681
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341	2.1141	2.0264	1.9986	1.9795	1.9552	1.9403	1.9302
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.0825	1.9938	1.9656	1.9464	1.9217	1.9066	1.8963
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757	2.054	1.9645	1.936	1.9165	1.8915	1.8761	1.8657
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0283	1.938	1.9092	1.8894	1.8641	1.8486	1.838
23	4.2793	3.4221	3.0278	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.005	1.9139	1.8848	1.8648	1.8392	1.8234	1.8128
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	1.9838	1.892	1.8625	1.8424	1.8164	1.8005	1.7896
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	1.9643	1.8718	1.8421	1.8217	1.7955	1.7794	1.7684
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.8874	1.7918	1.7609	1.7396	1.7121	1.695	1.6835
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245	1.7929	1.6928	1.66	1.6373	1.6077	1.5892	1.5766
50	4.0343	3.1826	2.79	2.5572	2.4004	2.2864	2.1992	2.1299	2.0734	2.0261	1.9515	1.8714	1.7371	1.6337	1.5995	1.5757	1.5445	1.5249	1.5115
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7001	1.5943	1.559	1.5343	1.5019	1.4814	1.4673
80	3.9604	3.1108	2.7188	2.4859	2.3287	2.2142	2.1263	2.0564	1.9991	1.9512	1.8753	1.7932	1.6542	1.5441	1.5081	1.4821	1.4477	1.4259	1.4107
100	3.9361	3.0873	2.6955	2.4626	2.3053	2.1906	2.1025	2.0323	1.9748	1.9267	1.8503	1.7675	1.6267	1.5151	1.4772	1.4504	1.4146	1.3917	1.3757
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6084	1.4952	1.4565	1.429	1.3922	1.3685	1.3519